*Postverlagsort Berlin*

# MATHEMATISCHE ZEITSCHRIFT

UNTER STÄNDIGER MITWIRKUNG VON

E. KAMKE
TÜBINGEN

R. NEVANLINNA
HELSINKI

E. SCHMIDT
BERLIN

F. K. SCHMIDT
HEIDELBERG

HERAUSGEGEBEN VON

H. WIELANDT
TÜBINGEN

WISSENSCHAFTLICHER BEIRAT

W. BLASCHKE L. FEJÉR A. E. INGHAM H. KNESER
W. MAGNUS O. PERRON G. PICKERT W. SÜSS

68. BAND, 2. HEFT

(ABGESCHLOSSEN AM 26. AUGUST 1957)

BERLIN · GÖTTINGEN · HEIDELBERG
SPRINGER-VERLAG
1957

Math. Z.

Die **MATHEMATISCHE ZEITSCHRIFT**

wurde im Jahre 1918 von *L. Lichtenstein* unter der Mitwirkung von *K. Knopp*, *E. Schmidt* und *I. Schur* gegründet und herausgegeben. Nach dem Tode Lichtensteins übernahm *K. Knopp* 1933 die Herausgabe. Die Schriftleitung ergänzte sich 1933 durch *E. Kamke* und *F. K. Schmidt*, 1936 durch *R. Nevanlinna* und 1950 durch *H. Wielandt*, der 1952 die Herausgabe übernahm.

---

Die Zeitschrift erscheint nach Maßgabe des eingehenden Materials. Der Preis des Bandes beträgt DM 96.—.

Die Mathematische Zeitschrift ist durch jede Buchhandlung zu beziehen.

Die Mathematische Zeitschrift dient der Pflege der reinen Mathematik, doch werden auch Beiträge aus den Gebieten der theoretischen Physik und Astronomie Aufnahme finden, soweit sie mathematisch von Interesse sind. Besprechungen, Aufgaben u. dgl. werden nicht zugelassen.

Es wird ausdrücklich darauf aufmerksam gemacht, daß mit der Annahme des Manuskriptes und seiner Veröffentlichung durch den Verlag das ausschließliche Verlagsrecht für alle Sprachen und Länder an den Verlag übergeht, und zwar bis zum 31. Dezember desjenigen Kalenderjahres, das auf das Jahr des Erscheinens folgt. Hieraus ergibt sich, daß grundsätzlich nur Arbeiten angenommen werden können, die vorher weder im Inland noch im Ausland veröffentlicht worden sind und die auch nachträglich nicht anderweitig zu veröffentlichen der Autor sich verpflichtet.

Es ist ferner ohne ausdrückliche Genehmigung des Verlages nicht gestattet, photographische Vervielfältigungen, Mikrofilme, Mikrophote u. ä., von den Zeitschriftenheften, von einzelnen Beiträgen oder von Teilen daraus herzustellen.

Die Mitarbeiter erhalten von ihren Arbeiten 75 Sonderdrucke unentgeltlich.

Manuskriptsendungen sind zu richten an die Mitglieder der unterzeichneten Redaktion. Die Herren Mitarbeiter werden im Interesse einer raschen Drucklegung gebeten, die Arbeiten in gut lesbarer Niederschrift einzureichen. Für den Text ist, wenn irgendmöglich, Maschinenschrift, für die mathematischen Formeln jedoch nur Handschrift zu verwenden. Etwaige Abbildungen sind auf einem besonderen Blatt zu zeichnen. Die in den Formeln etwa vorkommenden griechischen oder deutschen Buchstaben (Fraktur) sowie andere der Gefahr von Verwechselungen ausgesetzte Zeichen, z.B. die Landauschen Symbole $o$ und $O$, sind stets besonders (etwa mit verschiedenfarbigen Stiften) zu kennzeichnen. Die Fußnoten sind fortlaufend zu numerieren, bei Zitaten Erscheinungsjahr und Seitenzahlen anzugeben.

Wenn zu einer bereits gedruckten Arbeit eine Berichtigung nötig wird, wollen die Herren Verfasser dem Herausgeber hiervon unverzüglich Mitteilung machen. Die Berichtigungen sollen dann am Schlusse eines Bandes gesammelt aufgenommen werden.

REDAKTION DER MATHEMATISCHEN ZEITSCHRIFT:

**E. Kamke,** Tübingen, Frischlinstraße 27,
**R. Nevanlinna,** Helsinki (Finnland), Mäntytie 5 B,
**E. Schmidt,** Berlin-Steglitz, Sedanstraße 8,
**F. K. Schmidt,** Heidelberg, Mathematisches Institut,
**H. Wielandt,** Tübingen, Ob dem Viehweidle 21 b.

**Springer-Verlag OHG** — Berlin W 35, Reichpietschufer 20. — Heidelberg, Neuenheimer Landstraße 28/30. — Göttingen, Weender Straße 60.

---

68. Band **Inhalt** 2. Heft

Seite

Dinghas, A., Über eine Klasse superadditiver Mengenfunktionale von Brunn-Minkowski-Lusternikschem Typus . . . . . 111
Huppert, B., Zweifach transitive, auflösbare Permutationsgruppen . . . . . 126
Petersen, G. M., Sequences of Iterations . . . . . 151
Thoma, E., Zur Reduktionstheorie in allgemeinen Hilbert-Räumen . . . . . 153
Sah, C.-H., On a generalization of finite nilpotent groups . . . . . 189
Fan, K., Existence Theorems and Extreme Solutions for Inequalities Concerning Convex Functions or Linear Transformations . . . . . 205

DINGHAS, A.
Math. Zeitschr. Bd. 68, S. 111–125 (1957)

# Über eine Klasse superadditiver Mengenfunktionale von Brunn-Minkowski-Lusternikschem Typus

Von
ALEXANDER DINGHAS

**1. Einleitung.** Es bedeute $E^n$ den $n$-dimensionalen Vektorraum, $A, B$ zwei nichtleere Teilmengen von $E^n$ und $x, y$ zwei Punkte von $A$ bzw. $B$. Man definiere die Punktmenge $A+B$ durch die Gleichung

$$A+B=\{x+y \mid x\in A,\ y\in B\}, \tag{1.1}$$

und für reelles $\lambda$ die Punktmenge $\lambda A$ durch

$$\lambda A=\{\lambda x \mid x\in A\}. \tag{1.2}$$

Die Operation (1.1), die im folgenden als Minkowskische Addition[1]) geführt wird, definiert den Raum $2^H$ aller nichtleeren Teilmengen von $E^n$ als eine abelsche additive Halbgruppe, d.h. als einen Halbmodul. Wir sprechen im folgenden vom Minkowskischen Halbmodul $2^H$.

Man beschreibe nun $E^n$ durch gewöhnliche rechtwinklige Koordinaten $x_1, \ldots, x_n$ und betrachte eine auf einer sonst beliebigen, nichtleeren, beschränkten Punktmenge $M$ definierte positive, beschränkte Funktion $f(x)=f(x_1, \ldots, x_n)$. Eine solche Funktion soll im folgenden als zulässig bezeichnet werden. Liegt nun eine solche Funktion $f(x)$ vor, so definiere man den Ausdruck $I(f\mid M)$ durch folgende Vorschrift:

Es sei zunächst $F$ eine kompakte Punktmenge von $E^n$. Unter einer Überdeckung $W$ wird die Überdeckung von $F$ durch eine Vereinigung von endlich vielen abgeschlossenen, achsenparallelen Parallelotopen $I_1, \ldots, I_N$ verstanden. Liegt eine solche Überdeckungsmenge $W$ vor, so wird, wie üblich, ihr Inhalt durch $|W|$ bezeichnet.

Man betrachte jetzt endlich viele abgeschlossene punktfremde Teilmengen $F_1, \ldots, F_m$ von $M$ und wähle die Überdeckungen $W_k \supseteq F_k$ so, daß $W_i \cap W_k = \emptyset$ $(i \neq k)$ wird. Setzt man dann

$$\mu_k = \inf\{f(x) \mid x\in F_k\} \qquad (k=1, \ldots, m), \tag{1.3}$$

[1]) Im folgenden sollen, wie bereits erwähnt, nichtleere Punktmengen in Betracht gezogen werden. Was die Bezeichnung $+$ für die Minkowskische Summe anbetrifft, so habe ich geschwankt, ob ich diese durch $A+B$ oder $A\times B$ bezeichne. Bei der ersten Bezeichnung läuft man Gefahr, eine Verwechslung mit der Vereinigung herbeizuführen, die zweite ist anderweitig in Anspruch genommen. So blieb ich bei der üblichen Bezeichnung. Lediglich im Falle $A+\ldots+A$ ($m$ mal) empfiehlt sich die Bezeichnung $m\times A$, da es hier wegen der Gleichheit der Summanden auf deren Anordnung nicht ankommt. Die Schreibweise $mA$ würde hier zu einer Verwechslung mit der Menge (1.2) führen, die im allgemeinen von $m\times A$ verschieden ist.

so ist der Ausdruck

$$S = \inf\left\{\sum_1^m \mu_k |W_k| \mid W_k \supseteq F_k\right\}, \tag{1.4}$$

gleich der Summe

$$\mu_1 L(F_1) + \mu_2 L(F_2) + \cdots + \mu_m L(F_m), \tag{1.5}$$

wobei allgemein $L$ das Lebesguesche Maß bedeutet. Ist dieser Schritt getan, so definiere man $I(f|M)$ durch die Gleichung

$$I(f|M) = \sup\left\{\sum_1^m \mu_k L(F_k) \Big| \bigcup_1^m F_k \subseteq M\right\}. \tag{1.6}$$

Hierbei soll noch berücksichtigt werden, daß $F_i \cap F_k = \emptyset$ gilt, sobald $i \neq k$ ist. Ist $M$ meßbar, und $f$ meßbar in $M$, so stellt $I(f|M)$ das Lebesguesche Integral $\int_M f\,dL$ dar.

Man vergegenwärtige sich in der Tat die Definition der $L$-summierbaren Funktion[2]: Es sei $f$ eine auf $M$ ($M$ meßbar) reellwertige, nichtnegative (in unserem Falle beschränkte) meßbare Funktion von $x$. Man zerlege $M$ in eine endliche Anzahl, etwa $m$, von paarweise punktfremden, meßbaren Punktmengen $M_1, \ldots, M_m$ und bezeichne mit $\mu(f|M_k)$ die untere Grenze von $f$ in $M_k$. Dann gilt

$$\int_M f\,dL = \sup\left\{\sum_1^m \mu(f|M_k)\, L(M_k)\right\}. \tag{1.7}$$

Es sei jetzt $\varepsilon > 0$. Dann gilt für eine bestimmte Summe rechts

$$\sum_1^m \mu(f|M_k)\, L(M_k) \geq \int_M f\,dL - \frac{\varepsilon}{2}.$$

Man bestimme jetzt zu jedem $M_k$ eine abgeschlossene Teilmenge $F_k$ derart, daß $L(F_k) \geq L(M_k) - \varepsilon/2^k A$ $(k = 1, 2, \ldots, m)$ gilt, wobei $A$ das Supremum von $f$ auf $M$ bedeutet. Das ist nach klassischen Sätzen der Lebesgueschen Integrationstheorie stets möglich. Durch Anwendung dieser Ungleichung folgt dann

$$S = \sum_1^m \mu_k L(F_k) \geq \sum_1^m \mu(f|M_k)\, L(M_k) - \varepsilon,$$

und somit wird

$$I(f|M) \geq \int_M f\,dL - \varepsilon. \tag{1.8}$$

Da nun stets

$$I(f|M) \leq \int_M f\,dL$$

ist, so kann die Behauptung als bewiesen angesehen werden.

[2]) Man vgl. z. B. RADO, T., u. P. V. REICHELDERFER: Continuous Transformations in Analysis, S. 192. Berlin-Göttingen-Heidelberg: Springer 1955.

Die Zurückführung des Lebesgueschen Integrals $\int_M f\,dL$ auf die Summen $\sum_1^m \mu_k |W_k|$ gestattet, nachfolgenden Satz (den Hauptsatz der vorliegenden Arbeit) auf relativ elementarem Wege zu beweisen.

**Satz 1.** *Es seien $A_1, A_2$ zwei beschränkte, nichtleere Punktmengen von $E^n$ und es sei $A_1 + A_2 = A_0$ gesetzt. Man betrachte zwei zulässige Funktionen $f_1(x), f_2(x)$, welche auf $A_1$ bzw. $A_2$ definiert sein mögen, und bilde bei gegebenem $r$ $(0 < r < +\infty)$ die Funktion*

$$g_0(x) = \sup\{(f_1(x')^{1/r} + f_2(x'')^{1/r})^r \,|\, x' \in A_1,\ x'' \in A_2,\ x' + x'' = x\},$$

*für alle $x \in A_0$. Ist dann $f_0(x)$ eine auf $A_0$ definierte, zulässige Funktion, welche der Bedingung*

$$f_0(x) \geqq g_0(x) \qquad (x \in A_0) \tag{1.9}$$

*genügt, so gilt*

$$I(f_0|A_0)^{1/r+n} \geqq I(f_1|A_1)^{1/r+n} + I(f_2|A_2)^{1/r+n}. \tag{1.10}$$

Dieser Satz enthält (für $f_1 = f_2 = 1$, $r \to 0$) den klassischen Lusternikschen Satz als Grenzfall.

Einen direkten Beweis dieses Satzes für Borel-meßbare $A_1, A_2$, gestützt auf die Ergebnisse von Henstock und Macbeath[3]), findet der Leser in 4. In 6. entwickele ich kurz einen allgemeinen Satz in Zusammenhang mit dem Relativmaß von Punktmengen. Die kurzen Andeutungen in 5. haben lediglich den Zweck, die Schwierigkeiten meiner ursprünglichen Überlegungen anzudeuten und zugleich die Vorteile der in 3. entwickelten Methode herauszustellen.

**2. Vorbereitende Tatsachen.** Es bedeute zunächst $A$ eine beschränkte Punktmenge von $E^n$, die sich als Vereinigung von endlich vielen offenen, konvexen Punktmengen darstellen läßt. Ferner sei $g_A(x) = g_A(x_1, \ldots, x_n)$ eine in $A$ definierte, (zunächst) stetige, positive Funktion des Punktes $x(x_1, \ldots, x_n)$. Man setze

$$g_n^A(x) = \begin{cases} g_A(x) \,|\, x \in A \\ 0 \quad |\, x \notin A, \end{cases} \tag{2.1}$$

und bilde die Funktionen

$$g_{k-1}^A(x_1, \ldots, x_{k-1}) = \int_{-\infty}^{+\infty} g_k^A(x_1, \ldots, x_{k-1}, v)\,dv \tag{2.2}$$

für $k = 1, 2, \ldots, n$.

Es bezeichne jetzt $W_0$ den offenen Würfel

$$0 < \tau_k < 1 \qquad (k = 1, 2, \ldots, n) \tag{2.3}$$

[3]) Henstock, R., u. A. M. Macbeath: On the Measure of Sum-Sets (I). The theorems of Brunn, Minkowski and Lusternik. Proc. Lond. Math. Soc., Ser. III 3, 182—195 (1953).

und es bedeute $\tau(\tau_1, \ldots, \tau_n)$ einen Punkt von $W_0$. Ist $x \in A$, so definieren dann die Gleichungen

$$g_{k-1}^{A}(x_1, \ldots, x_{k-1})\,\tau_k = \int_{-\infty}^{x_k} g_k^A(x_1, \ldots, x_{k-1}, v)\,dv \tag{2.4}$$

für $k = 1, 2, \ldots, n$ eine eindeutige und stetige Abbildung von $A$ auf eine offene Teilmenge $W_0'$. Wie man leicht sieht, entspricht umgekehrt jedem Punkt $\tau(\tau_1, \ldots, \tau_n)$ von $W_0'$ ein vermöge der Gln. (2.4) eindeutig definierter Punkt $x(x_1, \ldots, x_n)$ von $A$. Somit ist die Abbildung $A \leftrightarrow W_0'$ eineindeutig und stetig. Wir nennen sie im folgenden die Brunn-Minkowski-Schmidtsche Abbildung von $A$ auf $W_0$[4]). Die Annahme, daß $g_A(x)$ in $A$ überall stetig ist, ist unwesentlich. Der Leser wird sofort feststellen können, daß einige Vorteile dieser Abbildung auch dann erhalten bleiben, wenn (unter Zugrundelegung des Lebesgueschen Integralbegriffes) nur angenommen wird, daß $g_A(x)$ in $A$ positiv und dort meßbar ist.

**3. Beweis des Satzes 1.** Es seien $F_1', \ldots, F_{m'}'$ bzw. $F_1'', \ldots, F_{m''}''$ paarweise punktfremde, abgeschlossene Teilmengen von $A_1$ bzw. $A_2$. Wir überdecken die $F_k'$ bzw. $F_k''$ durch paarweise punktfremde $W$-Mengen $W_k'$ bzw. $W_k''$ und setzen

$$W' = \bigcup_1^{m'} W_k', \qquad W'' = \bigcup_1^{m''} W_k''.$$

Es bedeuten nun $W_k'^*$ bzw. $W_l''^*$ die offenen Kerne von $W_k'$ bzw. $W_l''$. Man definiere $\mu_k', \mu_l''$ durch die Vorschrift (1.3) und setze

$$g_1(x) = \mu_k' \,|\, x \in W_k'^*, \quad k = 1, 2, \ldots, m' \tag{3.1}$$

bzw.

$$g_2(x) = \mu_l'' \,|\, x \in W_l''^*, \quad l = 1, 2, \ldots, m''. \tag{3.2}$$

Hierbei kann ohne Einschränkung der Allgemeinheit angenommen werden, daß sowohl $\mu_k'$ als auch $\mu_l''$ positiv sind. Liegt $x$ in $W' - \bigcup_1^{m'} W_k'^*$, so soll $g_1(x)$ gleich der zugehörigen unteren Limesfunktion[5]) genommen werden. Entsprechendes soll für die Funktion $g_2(x)$ gelten. Außerhalb $W'$ bzw. $W''$ setzen wir $g_1(x) = 0$ bzw. $g_2(x) = 0$.

Man setze jetzt $g_1(x) = g_n^{A_1}(x)$, $g_2(x) = g_n^{A_2}(x)$, und bilde nach dem Vorbild von Nr. 2 die offenen Kerne $W'^*$ bzw. $W''^*$ von $W'$ bzw. $W''$ eineindeutig und stetig auf die offenen Teilmengen $W_0'$ bzw. $W_0''$ von $W_0$ ab. Eine leichte Überlegung zeigt, daß bei dieser Abbildung die Mengen $W_0 - W_0'$ bzw. $W_0 - W_0''$ auf

[4]) In ihrer einfachsten Form ($g(P) = 1$ für $P \in A$ und $A$ spezieller Struktur) geht diese Transformation auf eine mündliche Mitteilung von ERHARD SCHMIDT aus dem Jahre 1942 zurück. [Man vgl. darüber meinen Aufsatz: Über einen geometrischen Satz von WULFF für die Gleichgewichtsformen von Kristallen. Z. Kristallogr. (A) **105**, 304—314 (1943).]

[5]) Man vgl. z. B. CARATHEODORY, C.: Reelle Funktionen I, S. 100. Leipzig und Berlin: Teubner 1939.

höchstens endlich vielen (achsenparallelen) Hyperebenen $\tau_1 = k_1, \ldots, \tau_q = k_q$ liegen und somit $|W_0'| = |W_0''| = 1$ gelten muß. Man setze jetzt $T = W_0' \cap W_0''$, $\xi = \xi(\tau)$ und nehme an, daß der Vektor die Koordinaten

$$\xi_k = x_k^1(\tau_1, \ldots, \tau_k) + x_k^2(\tau_1, \ldots, \tau_k) \qquad (k = 1, \ldots, n)$$

habe.

Hierbei sollen $x_k^1$ bzw. $x_k^2$ die durch die Brunn-Minkowski-Schmidtsche Abbildung von 2. gewonnenen Funktionen darstellen.

Nun ist die Menge

$$W(T) = \{\xi \mid \xi = \xi(\tau),\ \tau \in T\}$$

in $W' + W''$ enthalten. Verwendet man also die vorhin gebildeten Funktionen $g_1(x)$ bzw. $g_2(x)$, und schreibt man $g_W(x)$ für die Funktion

$$\text{(3.3)} \qquad \operatorname{Max}\{(g_1(x')^{1/r} + g_2(x'')^{1/r})^r \mid x = x' + x'',\ x' \in W',\ x'' \in W''\},$$

und $g_W(\tau)$ für die Funktion

$$\{g_1(x'(\tau))^{1/r} + g_2(x''(\tau))^{1/r}\}^r,$$

so wird zunächst

$$\text{(3.4)} \qquad \int_{W'+W''} g_W(x)\, dx_1 \ldots dx_n \geqq \int_{W(T)} g_W(\tau)\, d\xi_1 \ldots d\xi_n.$$

Es bezeichne jetzt $D(\xi \mid \tau)$ die Funktionaldeterminante der $\xi_i$ in bezug auf die $\tau_k$. Dann gilt

$$\text{(3.5)} \qquad D(\xi \mid \tau) = \prod_1^n \left\{ \frac{g_{k-1}^{A_1}}{g_k^{A_1}} + \frac{g_{k-1}^{A_2}}{g_k^{A_2}} \right\},$$

und somit ist der Integrand rechts in (3.4) wegen $g_1 = g_n^{A_1}$, $g_2 = g_n^{A_2}$, gleich

$$\text{(3.6)} \qquad \{(g_n^{A_1})^{1/r} + (g_n^{A_2})^{1/r}\}^r \prod_1^n \left\{ \frac{g_{k-1}^{A_1}}{g_k^{A_1}} + \frac{g_{k-1}^{A_2}}{g_k^{A_2}} \right\}.$$

Nun gilt allgemein für positive $\alpha_k, \beta_k$ $(k = 1, 2, \ldots, l)$ und positive $r_k$ mit $r_1 + \cdots + r_l = 1$ die Ungleichung

$$\text{(3.7)} \qquad \prod_1^l (\alpha_k + \beta_k)^{r_k} \geqq \prod_1^l \alpha_k^{r_k} + \prod_1^l \beta_k^{r_k},$$ [6])

und somit ist der Ausdruck (3.6) nicht kleiner als

$$\{(g_0^{A_1})^{1/r+n} + (g_0^{A_2})^{1/r+n}\}^{r+n}.$$

Führt man nun die in 1. entwickelten Grenzprozesse durch, so konvergieren die Integrale

$$\text{(3.8)} \qquad g_0^{A_1} = \int_{W'} g_1(x)\, dx_1 \ldots dx_n = \int_{W'} g_1\, dL$$

---

[6]) Hardy-Littlewood-Polya: Inequalities, S. 39. Cambridge: Univ. Press 1952.

und

$$g_0^{A_2} = \int_{W''} g_2(x)\, dx_1 \dots dx_n = \int_{W''} g_2\, dL, \tag{3.9}$$

gegen die Größen $I(f_1|A_1)$ bzw. $I(f_2|A_2)$, und somit konvergiert die rechte Seite der Ungleichung (3.4) gegen

$$\{I(f_1|A_1)^{1/r+n} + I(f_2|A_2)^{1/r+n}\}^{r+n}. \tag{3.10}$$

Es seien jetzt $(W_n')$ bzw. $(W_n'')$ zwei monoton gegen $F' = \bigcup_1^{m'} F_k'$ bzw. $F'' = \bigcup_1^{m''} F_k''$ konvergierende Folgen von würfelförmigen Überdeckungsmengen und es sei $F = F' + F''$.

Man setze

$$g(x) = \operatorname{Max}\{(\mu_i'^{1/r} + \mu_k''^{1/r})^r | x = x' + x'',\ x' \in F_i',\ x'' \in F_k''\},$$

und beachte, daß $g(x) \leqq f_0(x)$ $(x \in F)$ gilt. Ist dann $\varepsilon > 0$ vorgegeben, so bleibt die linke Seite von (3.4) für große $n$ kleiner als

$$\int_F g_{W_n}(x)\, dx_1 \dots dx_n + M\varepsilon \qquad (W_n = W_n' + W_n''), \tag{3.11}$$

wobei $M$ lediglich vom Supremum von $f_0$ auf $A_0$ abhängt und das Integral im Lebesgueschen Sinne genommen wird. Da nun $g_{W_n}(x)$ $(x \in F)$ für $n \to \infty$ gegen $g(x)$ konvergiert, so ist der Grenzwert des Ausdrucks (3.11) kleiner als

$$I(f_0|F) + M\varepsilon \leqq I(f_0|A_0) + M\varepsilon.$$

Das beweist die Behauptung (1.10). Durch eine leichte Abänderung der Überlegung kann man hier die Verwendung des Lebesgueschen Integralbegriffs in der Ungleichung (3.11) umgehen. Wir gehen jedoch darauf nicht ein.

**4. Beweis des Satzes 1 durch Induktion.** Sind $A_1, A_2$ zwei nichtleere, beschränkte $F_\sigma$-Mengen von $E^n$, so kann man den Beweis des Satzes 1 durch Induktion erbringen. Dieser Beweis, der in dieser Nummer entwickelt werden soll, zeigt zugleich, welcher Verallgemeinerung der ursprüngliche geniale Gedanke von HERMANN BRUNN, wodurch erst die Theorie der konvexen Körper überhaupt gegründet wurde, fähig ist[7]). Es soll jedoch ausdrücklich ver-

[7]) Das Schicksal des Gedankens von BRUNN, der ursprünglich in der Zuordnung von parallelen Schnitten zweier konvexer Körper durch gleiche Volumenverhältnisse bestand, und der zur Aufstellung des Brunn-Minkowskischen Satzes führte, ist merkwürdig. MINKOWSKI (Werke Bd. 2, S. 125) zitiert in diesem Zusammenhang die Stelle BRUNNS (Dissertat. S. 31): „Zum Beweis der isoperimetrischen Eigenschaft der Kugel läßt sich allerdings dieser Gedanke nicht verwerten." Es ist interessant, daß MINKOWSKI, der dies für konvexe Körper getan hat, nicht bemerkte, daß dieses Verfahren unter Zugrundelegung auch nicht konvexer Punktmengen $A_1$ zum Ziele führt. Auch BONNESEN (Les problèmes des isopérimètres et des isépiphanes, Gauthier Villars, Paris 1929) ist ähnlicher Ansicht. So schreibt er (loc. cit. S. 111) im Zusammenhang mit der isoperimetrischen Ungleichung $O^3 - 36\pi V^2 \geqq 0$ für konvexe Körper: „Cette inégalité subsiste aussi pour les corps non convexes, mais on ne peut pas l'obtenir par ces méthodes." In meiner Wiener Arbeit [Sitzungsber. Akad. Wissensch. Wien, Mathem.-Naturwiss. Kl.

merkt werden, daß erst die Arbeit von HENSTOCK und MACBEATH, in der zum ersten Male allgemeine Punktmengen und moderne Methoden herangezogen wurden, diesen Fortschritt überhaupt ermöglichte[8]).

Wir betrachten mit HENSTOCK und MACBEATH zwei Funktionen $g_1(x)$, $g_2(x)$ $(x \in E^1)$, welche dort beschränkt und nicht negativ sind und außerhalb eines Intervalls verschwinden. Man definiere die Funktion $h(x, y)$ $(x, y \in E^1)$ durch die Gleichung

$$h(x,y) = \begin{cases} g_1(x) + g_2(y) & | \; g_1(x)\, g_2(y) > 0 \\ 0 & | \; g_1(x)\, g_2(y) = 0 \end{cases} \tag{4.1}$$

und setze

$$g_0(u) = \sup\{h(x,y) \,|\, x + y = u\}. \tag{4.2}$$

Dann gilt der

**Hilfssatz 1** (HENSTOCK-MACBEATH). *Sind $g_1, g_2$ und $g_0$ Borel-meßbar in $E^1$, so gilt für jedes endliche $\alpha > 0$*

$$\left\{\int_{-\infty}^{+\infty} g_0(u)^\alpha \, du\right\}^{1/\alpha+1} \geqq \left\{\int_{-\infty}^{+\infty} g_1(x)^\alpha \, dx\right\}^{1/\alpha+1} + \left\{\int_{-\infty}^{+\infty} g_2(x)^\alpha \, dx\right\}^{1/\alpha+1}. \tag{4.3}$$

An sich ist Satz 1 die naturgemäße Verallgemeinerung dieses wichtigen Satzes von HENSTOCK und MACBEATH auf den euklidischen Zahlenraum $E^n$. Es bedeute jetzt $\mathfrak{F}_\sigma$ die Gesamtheit aller nichtleeren, beschränkten $F_\sigma$-Teilmengen von $E^n$ und es seien $A_1$, $A_2 \in \mathfrak{F}_\sigma$. Man setze wieder $A_0 = A_1 + A_2$. Dann ist zunächst $A_0 \in \mathfrak{F}_\sigma$. Man setze die im Satz 1 herangezogenen Funktionen als Borel-meßbar voraus und betrachte eine auf $A_0$ definierte, positive, dort Borel-meßbare Funktion $f_0(x)$, welche in jedem Punkt $x_0$ von $A_0$ der Bedingung $f_0(x_0) \geqq g_0(x_0)$ genügt. Dann kann folgende Verallgemeinerung des Hilfssatzes 1 bewiesen werden:

**Satz 1'.** *Man setze*

$$I(f_k | A_k) = \int_{A_k} f_k \, dv_1 \ldots dv_n \qquad (k = 0, 1, 2). \tag{4.4}$$

*Dann gilt*

$$I(f_0 | A_0)^{1/\alpha+n} \geqq I(f_1 | A_1)^{1/\alpha+n} + I(f_2 | A_2)^{1/\alpha+n}. \tag{4.5}$$

Will man den Beweis dieses Satzes durch Induktion erbringen, so muß man, wie ich es in einer vorherigen Note kurz getan habe[9]), folgende Verall-

---

**149**, 399—432 (1940)] und in der zusammen mit ERHARD SCHMIDT (Abhandl. Preuß. Akad. Wissensch. Jg. 1943, Mathem.-Naturwiss. Kl. Nr. 7, 1944, 18 S.) publizierten Abhandlung ist zum ersten Male gezeigt worden, daß diese Methoden tatsächlich dafür ausreichen. BONNESEN hielt allerdings (loc. cit. S. 147) von Verallgemeinerungen im Sinne TONELLIS, GROSS' und Nachfolger nicht viel. („Or du point de vue géométrique, ces sortes de hérissons ne sont pas particulièrement interessantes.")

[8]) Wie der Leser sieht, führt der Brunnsche Gedanke über den Lusternikschen Satz hinaus.

[9]) Über zwei allgemeine Sätze von Brunn-Minkowski-Lusternikschem Typus, Det. Kongel. Norske Videnskabers Selskabs Forhandl. **28**, Nr. 33 (1955).

gemeinerung der Brunn-Minkowskischen Methode von HENSTOCK und MACBEATH heranziehen. Wir formulieren zunächst den Hilfssatz 1 in der Sprache des Satzes 1′:

**Hilfssatz 1′.** *Es seien* $A_1, A_2 \in E^1$ *zwei Elemente von* $\mathfrak{F}_\sigma$ *und* $f_1(x), f_2(x)$ $(x \in E^1)$ *zwei dort zulässige, Borel-meßbare Funktionen. Gibt es dann in* $A_0 = A_1 + A_2$ $(A_0 \in \mathfrak{F}_\sigma)$ *eine Borel-meßbare Funktion* $f_0(x)$ *mit der Eigenschaft*

$$f_0(x) \geqq \sup\left\{\left(f_1(x')^{1/r} + f_2(x'')^{1/r}\right)^r \,\middle|\, x' + x'' = x,\ x' \in A_1,\ x'' \in A_2\right\}, \tag{4.6}$$

*so gilt für jedes endliche* $r > 0$

$$I(f_0 \,|\, A_0)^{1/r+1} \geqq I(f_1 \,|\, A_1)^{1/r+1} + I(f_2 \,|\, A_2)^{1/r+1}. \tag{4.7}$$

Definiert man die Funktionen $f_k$ außerhalb ihrer Definitionsmengen $A_k$ durch Null, so kann man die Ausdrücke $I(f_k \,|\, A_k)$ durch die Gleichungen

$$I(f_k \,|\, A_k) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_k(x)\, dx \tag{4.8}$$

definieren.

Man setze jetzt $f_k = g_k^r$ $(k = 0, 1, 2)$ und beachte, daß dann (4.6) in die Ungleichung

$$g_0(x) \geqq \sup\{(g_1(x') + g_2(x'')) \,|\, x = x' + x'',\ x' \in A_1,\ x'' \in A_2\} \tag{4.9}$$

übergeht. Ferner setze man mit HENSTOCK und MACBEATH

$$\Phi_k = \int_{-\infty}^{+\infty} g_k(x)^r\, dx \qquad (k = 1, 2),$$

und

$$x_k(\tau) = \inf\left\{x \,\middle|\, \int_{-\infty}^{x} g_k(t)^r\, dt \geqq \tau\, \Phi_k\right\}. \tag{4.10}$$

Hierbei interessiert uns lediglich der Fall, wo $\Phi_1, \Phi_2 > 0$ gilt.

Die Funktionen $x_k(\tau)$ $(k = 1, 2)$ sind im Intervall $T_0 : (0, 1)$ eigentlich monoton und für jedes $\tau \in T_0$ definiert. Setzt man $x_0(\tau) = x_1(\tau) + x_2(\tau)$, so gibt es zu jedem Punkt $u_0 \in x_0(T_0)$ einen und nur einen Punkt $\tau_0$ mit der Eigenschaft $x_0(\tau_0) = u_0$ [10]).

Der entscheidende Schritt zum Beweis des Hilfssatzes 1′ wird durch folgenden Hilfssatz getan.

**Hilfssatz 2** (HENSTOCK-MACBEATH). *Sind* $g_1(x)$ *bzw.* $g_2(x)$ *in den Punktmengen* $A_1, A_2 (A_1, A_2 \subset E^1, A_1, A_2 \in \mathfrak{F}_\sigma)$ *Borel-meßbar und definiert man die Funktion* $g_0^*(x)$ $(x \in x_0(T_0))$ *durch die Gleichung*

$$g_0^*(x) = \begin{cases} g_1(x_1(\tau)) + g_2(x_2(\tau)) \,|\, x \in x_0(T),\ x = x_0(\tau) \\ 0 \qquad\qquad\qquad\qquad \text{sonst}, \end{cases}$$

[10]) HENSTOCK-MACBEATH: loc. cit. S. 188.

*so gilt*

$$(4.11)\qquad \left\{\int_{-\infty}^{+\infty} g_0^*(x)^r\,dx\right\}^{1/r+1} \geqq \left\{\int_{-\infty}^{+\infty} g_1(x)^r\,dx\right\}^{1/r+1} + \left\{\int_{-\infty}^{+\infty} g_2(x)^r\,dx\right\}^{1/r+1}.$$

Für den Beweis dieses Satzes möge hier auf die Arbeit von HENSTOCK und MACBEATH verwiesen werden[11]). Ist dieser einmal erbracht, so folgt der Beweis des Hilfssatzes 1′ mit Rücksicht auf die Ungleichung $g_0(x) \geqq g_0^*(x)$ $(x \in A_0)$ wegen der (vorausgesetzten) Borelschen Meßbarkeit von $g_0(x)$ ohne jegliche Schwierigkeit. Ist Hilfssatz 2 einmal bewiesen worden, so folgt der Beweis des Hilfssatzes 1′ durch die Substitution $g_k \to f_k^{1/r}$.

Sind jetzt $A_1, A_2$ zwei nichtleere, beschränkte Punktmengen von $\mathfrak{F}_\sigma$ und $A_0 = A_1 + A_2 (A_0 \in \mathfrak{F}_\sigma)$, so setze man

$$(4.12)\qquad g_{k\,0}(x) = f_k(x) \qquad (k = 0, 1, 2)$$

mit $x = x(x_1, \ldots, x_n)$ und für ein $m$ mit $1 \leqq m \leqq n$

$$(4.13)\qquad g_{k|m} = g_{k|m}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_k(x)\,d\,x_1 \ldots d\,x_m.$$

Hierbei spielt die Funktion $f_0(x)$ dieselbe Rolle wie im Satz 1, d.h. sie ist in $A_0$ Borel-meßbar (wie die $f_1, f_2$ in $A_1$ bzw. $A_2$) und genügt der Ungleichung (4.6). Sowohl $f_0$ als auch $f_1$ und $f_2$ sind hier ebenfalls außerhalb ihrer Definitionsmengen $A_0$ bzw. $A_1$ und $A_2$ durch Null definiert.

Da der Durchschnitt einer Borelschen, speziell einer $F$-Menge mit einer Hyperebene ebenfalls eine Punktmenge derselben Art ist, existieren stets die Integrale rechts und hängen nach fundamentalen Sätzen der Lebesgueschen Integrationstheorie durch die Gleichungen

$$(4.14)\qquad g_{k|m+1} = \int_{-\infty}^{+\infty} g_{k|m}\,d\,x_{m+1} \qquad (m = 0, 1, \ldots, n-1)$$

zusammen.

Es seien jetzt $x(u_1, \ldots, u_n)$, $y(v_1, \ldots, v_n)$ und $t(t_1, \ldots, t_n)$ $(t = x + y;$ $t_k = u_k + v_k)$ drei Punkte von $E^n$ mit $x \in A_1$, $y \in A_2$. Man setze $x$, $y$ bei festem $m$ als Punkte der Unterräume

$$H_1^{n-m}: x_j = u_j; \qquad H_2^{n-m}: y_j = v_j \qquad (j = 1, 2, \ldots, m)$$

voraus und nehme an, daß Satz 1′ für ein $m$, $1 \leqq m < n$ in der Form

$$(4.15)\qquad g_{1|m}^{1/r+m} + g_{2|m}^{1/r+m} \leqq g_{0|m}^{1/r+m}$$

gilt. Dann folgt zunächst daraus

$$(4.16)\qquad \sup\{g_{1|m}^{1/r+m} + g_{2|m}^{1/r+m} \mid u_{m+1} + v_{m+1} = t_{m+1}\} \leqq g_{0|m}^{1/r+m}.$$

Jetzt verwende man die Ungleichung (4.7) mit $r+m$ an Stelle von $r$ und $g_{1,m}, g_{2\,m}$ für $f_1, f_2$. Geht man dann zur Definition von $f_0$ zurück, so sieht man, daß hier

$$f_0 \geqq \sup\{g_{1|m}^{1/r+m} + g_{2|m}^{1/r+m} \mid u_{m+1} + v_{m+1} = t_{m+1}\}$$

---

[11]) HENSTOCK-MACBEATH, S. 188.

genommen werden kann, also mit Rücksicht auf (4.16) gleich $g_{0|m}$. Somit erhält man die definitive Ungleichung

$$g_{0|m+1}^{1/r+m+1} = \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} g_{0|m}\, dt_{m+1} \right\}^{1/r+m+1} \geq g_{1|m+1}^{1/r+m+1} + g_{2|m+1}^{1/r+m+1}.$$

Das erledigt die Induktion und somit auch den Beweis der Ungleichung (4.5), d.h. des Satzes 1'.

**5. Bemerkungen zum Beweis des Hilfssatzes 1.** Der Beweis, den HENSTOCK und MACBEATH für die grundlegende Ungleichung (4.11) geben, stützt sich, wenn man von zwei wichtigen topologischen Hilfssätzen absieht, im wesentlichen auf folgenden grundlegenden Satz:

**Hilfssatz 3** (HENSTOCK-MACBEATH). *Ist $T$ eine Borelsche Teilmenge von $T_0$, so gilt, sofern $\Phi_1, \Phi_2 > 0$ sind*

$$L(T) = \frac{1}{\Phi_1} \int_{x_1(T)} g_1(x)^\alpha\, dx = \frac{1}{\Phi_2} \int_{x_2(T)} g_2(x)^\alpha\, dx. \tag{5.1}$$

Will man nun bei der Auswertung des Integrals links in (4.11) die Veränderliche $\tau$ einführen und die Transformationstheorie des Lebesgueschen Integrals verwenden, so wird man zunächst auf die Funktionen

$$g_k(x_k(\tau)) = r_k(\tau) \qquad (k = 1, 2) \tag{5.2}$$

geführt. Sind diese Funktionen definiert, so wird es sich weiter darum handeln, die Summierbarkeit der Funktion

$$(r_1(\tau) + r_2(\tau))^\alpha \left( \frac{\Phi_1}{r_1(\tau)^\alpha} + \frac{\Phi_2}{r_2(\tau)^\alpha} \right) \tag{5.3}$$

nachzuweisen und darüber hinaus zu zeigen, daß ihr Integral von $\tau = 0$ bis $\tau = 1$ das Integral links in (4.11) nicht übersteigt. Ein Weg, diese Behauptungen zu beweisen, wäre etwa folgender:

Man setze für $\tau \in T_0$

$$1/\mathring{r}_k(\tau) = \begin{cases} 1/r_k(\tau) \mid r_k(\tau) > 0 \\ 0 \quad\;\; \mid r_k(\tau) = 0 \end{cases} \tag{5.4}$$

und

$$\xi_k = \Phi_k \int_0^\tau \frac{d\tau}{\mathring{r}_k(\tau)^\alpha} \qquad (k = 1, 2). \tag{5.5}$$

Dann sind $\xi_1, \xi_2$ summierbar in $T_0$ und fast überall dort $\xi_k'(\tau) = \Phi_k / \mathring{r}_k(\tau)^\alpha$ Man bilde in der Tat die Mengen

$$E_k^{(m)} = \left\{ \tau \mid r_k(\tau) > \frac{1}{m} \right\} \qquad (k = 1, 2;\ m = 1, 2, \ldots), \tag{5.6}$$

und beachte noch, daß die Mengen

$$E_k = \{ \tau \mid r_k(\tau) = 0 \} \qquad (k = 1, 2) \tag{5.7}$$

das Maß Null haben[12]). Wir definieren jetzt die (monotonen Folgen) $(r_k^{(m)}(\tau))$ $(k=1, 2)$ durch die Gleichungen

$$1/r_k^{(m)}(\tau) = \begin{cases} 1/r_k(\tau) & | \ \tau \subseteq E_k^{(m)} \\ 0 & | \ \tau \not\subseteq E_k^{(m)}, \end{cases} \tag{5.8}$$

und berücksichtigen folgende Tatsachen:

1. Jede Funktion $1/r_k^{(m)}(\tau)$ ist meßbar. [Da $g_k(x)$ Borel-meßbar und $\tau(x_k)$ totalstetig.]

2. Die Integrale

$$\int \frac{d\tau}{(r_k^{(m)}(\tau))^\alpha} \qquad (k=1, 2;\ m=1, 2, \ldots) \tag{5.9}$$

erstreckt über $T_0$ sind gleichmäßig beschränkt.

Daraus kann man folgern[13]), daß die Grenzfunktionen

$$1/\mathring{r}_k(\tau)^\alpha = \lim_{m\to\infty} \{1/r_k^{(m)}(\tau)^\alpha\} \qquad (k=1, 2)$$

summierbar sind und somit auch die Summe derselben.

Ist nun dies bewiesen, so wird man dazu geführt, zu zeigen, daß der Ausdruck

$$\nu_0(T) = \Phi_1 \int \frac{d\tau}{\mathring{r}_1(\tau)^\alpha} + \Phi_2 \int \frac{d\tau}{\mathring{r}_2(\tau)^\alpha} = \nu_1(T) + \nu_2(T)$$

ein Borelsches Maß über dem Ring aller Borelschen Teilmengen $T$ von $T_0$ darstellt.

Als letzter Schritt des Beweises wäre nun lediglich der Nachweis zu erbringen, daß

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g_0(x)^\alpha \, dx \geq \int_{T_0} (\mathring{r}_1(\tau) + \mathring{r}_2(\tau))^\alpha \left( \frac{\Phi_1}{\mathring{r}_1(\tau)^\alpha} + \frac{\Phi_2}{\mathring{r}_2(\tau)^\alpha} \right) d\tau$$

gilt. Das wäre wieder wahrscheinlich möglich über die Funktion $g_0^*(x)$. Ist diese Ungleichung bewiesen, so genügt es, um (4.3) zu erhalten nur (3.7) anzuwenden.

Ich habe diesen Beweisversuch des Henstock-Macbethschen Satzes hier skizziert, nicht nur wie ich es in der Einleitung erwähnte, um die Schwierigkeiten aufzuzeichnen, die ich bei meinen ursprünglichen Bemühungen, auf anderem (dem Brunn-Minkowskischen näheren) Wege an diesen Satz heranzukommen, zu überwinden hatte, sondern auch um zu zeigen, wie der Weg von 3. viele dieser Schwierigkeiten umgeht und den allgemeinen Satz 1 leicht zu beweisen gestattet. In der nächsten Nummer soll jetzt eine wichtige Anwendung dieses Satzes gegeben werden.

**6. Relativmaß von Punktmengen. Verallgemeinerung des Lusternikschen Satzes.** Es sei $2^M$ ein vorgelegter Minkowskischer Halbmodul von $E^n$

[12]) Henstock-Macbeath: loc. cit. S. 189.

[13]) Man vgl. z.B. MacShane: Integration, S. 81. Princeton: Univ. Press 1947.

($2^M \subseteq 2^H$), d.h. eine Gesamtheit von nichtleeren, beschränkten Teilmengen von $E^n$ mit der Eigenschaft, daß aus $A, B \in 2^M$ stets $A+B \in 2^M$ folgt. Als wichtige solche Teilmoduln sollen hier neben $2^H$ die Gesamtheit aller konvexen Punktmengen von $E^n$, die Gesamtheit aller offenen bzw. aller abgeschlossenen Punktmengen oder auch noch die Gesamtheit aller $F$-Mengen bzw. Borelschen Mengen von $E^n$ angeführt werden. Bekanntlich bildet die Gesamtheit aller meßbaren Punktmengen von $E^1$ (also auch von $E^n$) keinen Minkowskischen Halbmodul[14]). Liegt nun $2^M$ vor, so heißt eine für jedes Element $A$ von $2^M$ definierte Funktion $g_A(x)$ $(x=(x_1, \ldots, x_n))$ ein Minkowskisches Funktional, wenn diese folgenden Bedingungen genügt.

1. Für jedes $x \in A$ gilt

$$0 \leqq g_A(x) < +\infty. \tag{6.1}$$

Im folgenden wird angenommen [falls nötig unter Weglassung der Teilmenge von $A$ auf der $g_A(x)$ verschwindet[15])], daß $g_A(x)$ auf $A$ der Ungleichung

$$g_A(x) > 0 \tag{6.2}$$

genügt.

2. $g_A(x)$ ist translationsinvariant. Das soll bedeuten: Geht $A^\tau$ aus $A$ durch eine Translation $\tau$ hervor, so gilt $g_{A^\tau}(x^\tau) = g_A(x)$. Dabei ist $x^\tau = x+\tau$. Allgemeiner kann man an Stelle der Translationsinvarianz die Bewegungsinvarianz von $g_A(x)$ fordern.

3. $g_A(x)$ ist homogen vom Grade $r>0$ in bezug auf $A$, d.h. sie erfüllt die Bedingung

$$g_{hA}(hx) = h^r g_A(x). \tag{6.3}$$

4. $g_A(x)$ ist monoton in bezug auf $A$, d.h. sie genügt für $A \subseteq B$ $(A, B \in 2^M)$ der Ungleichung

$$g_A(x) \leqq g_B(x) \qquad (x \in A). \tag{6.4}$$

5. $g_A(x)$ ist im folgenden Sinne superadditiv. Sind $A, B$ zwei beliebige Elemente von $2^M$, so gilt

$$g_{A+B}(x+y)^{1/r} \geqq g_A(x)^{1/r} + g_B(x)^{1/r}, \tag{6.5}$$

für jedes Punktepaar $x, y$ $(x \in A, y \in B)$. Aus (6.4) folgt ohne weiteres

$$g_{A+B}(x_0)^{1/r} \geqq \sup\{g_A(x)^{1/r} + g_B(y)^{1/r} \mid x_0 = x+y\}. \tag{6.6}$$

Mit Hilfe eines Minkowskischen Funktionals $g_A(x)$ über einem Minkowskischen Halbmodul $2^M$ kann stets ein superadditives Mengenfunktional $I(g_A|A)$ [kürzer $I(g_A)$] über $2^M$ definiert werden, sobald dieses durch die Vorschrift

[14]) SIERPINSKI, W.: Sur la question de la mesurabilité de la base de M. HAMEL. Fundam. Math. **1**, 105—111 (1920).

[15]) Im Falle, wo (Borelsche) Meßbarkeitsfragen auf dem Spiele stehen, wird angenommen, daß die Menge $\{x \mid g_A(x) = 0\}$ das Borelsche Maß Null hat.

von 1. definiert wird[16]). Sind die Mengen $A$ $F_\sigma$-Mengen, so kann $I(g_A)$ auch direkt durch die Gleichung

$$I(g_A) = \int_A g_A(x)\, dx_1 \dots dx_n \tag{6.7}$$

definiert werden.

Der allgemeinste Satz in dieser Richtung scheint folgender zu sein:

**Satz 2.** *Es sei $2^M$ ein gegebener Minkowskischer Halbmodul von $E^n$ und $g_A$ ein darauf definiertes Minkowskisches Funktional. Dann ist $I(g_A)$ ein superadditives Mengenfunktional über $2^M$, d.h. derart, daß dort für je zwei Elemente $A, B$ von $2^M$ die Ungleichung*

$$I(g_{A+B})^{1/r+n} \geq I(g_A)^{1/r+n} + I(g_B)^{1/r+n} \tag{6.8}$$

*gilt.*

Der Beweis der Ungleichung (6.8) folgt aus dem Satz 1, wenn man dort (unter Zugrundelegung des Haldmoduls $2^H$) $f_1 = g_{A_1}$, $f_2 = g_{A_2}$ nimmt und $f_0$ gleich $g_{A_0}$ wählt. Ist $2^M = \mathfrak{S}_\sigma$, so folgt der Beweis von (6.8) aus dem Satz 1'. In diesem Falle ist $I(g_A)$ durch (6.7) definiert und somit muß neben den Bedingungen 1. bis 5. als Bedingung 6. noch die (Borelsche) Meßbarkeit von $g_A$ gefordert werden.

Ein interessantes superadditives Mengenfunktional[17]) erhält man durch folgendes Verfahren: Es bedeute $2^G$ den Minkowskischen Halbmodul, der aus allen nichtleeren, offenen Punktmengen von $E^n$ besteht. Ferner sei $\Lambda_m$ $(1 \leq m \leq n)$ ein linearer Unterraum von $E^n$ und $2^{M_m}$ ein Minkowskischer Halbmodul in $\Lambda_m$. Man nehme an, es gäbe eine isomorphe Abbildung $A \leftrightarrow K$ der Elemente $A$ von $2^G$ auf die Elemente $K$ von $2^{M_m}$, d.h. so, daß aus $A_1 \leftrightarrow K_1$, $A_2 \leftrightarrow K_2$ stets $A_1 + A_2 \leftrightarrow K_1 + K_2$ folgt. Man kann ohne Einschränkung der Allgemeinheit annehmen, daß $\Lambda_m$ den Nullpunkt 0 von $E^n$ enthält. Ist dies getan, so soll $K^x$ die parallelverschobene Punktmenge $K$ darstellen, derart, daß der Punkt 0 (der mit $K$ als fest verbunden gedacht wird) in den Punkt $x$ kommt. Man bilde jetzt die Funktion

$$g_A(x|K) = \sup\{L_*(tK^x) \mid tK^x \subseteq A\} \tag{6.8}$$

für jedes Element $A \in 2^G$ und $K \leftrightarrow A$. Hierbei soll $L_*$ das innere Lebesguesche Maß bedeuten. Wie man leicht feststellt, genügt $g_A(x|K)$ den Forderungen 1. bis 5., und zwar den Bedingungen 3. und 5. mit $m$ an Stelle von $r$. Die Erfüllbarkeit dieser letzteren Bedingung ist allerdings Folgerung des klassischen Lusternikschen Satzes, der hier nicht bewiesen wird. Verwendet man in (6.1) die Funktion $g_A(x|K)$ (kurz $g_A$), so kann man behaupten:

[16]) Ist $A$ nicht beschränkt, so kann $I(g_A|A)$ durch Ausschöpfung von $A$ durch eine ansteigende Folge beschränkter Punktmengen definiert werden.

[17]) In der letzten Zeit ist auch HADWIGER auf allgemeinere superadditive Funktionale innerhalb Minkowskischer Halbmoduln konvexer Körper gestoßen. Eine schöne Darstellung der Hadwigerschen Ergebnisse findet der Leser in seiner Arbeit, Konkave Eikörperfunktionale, Monatsh. Math. **59**, 230–237 (1955). Auf die mehrere Jahre zurückliegende Leistung von HERBERT KNOTHE komme ich in der nächsten Nummer zurück.

**Satz 3.** *Es gilt*

$$I(g_{A+B})^{1/m+n} \geqq I(g_A)^{1/m+n} + I(g_B)^{1/m+n}. \tag{6.9}$$

Auf weitere geometrisch deutbare, superadditive Mengenfunktionale wird hier nicht eingegangen werden.

**7. Der Satz von Herbert Knothe.** Besteht $2^G$ aus allen offenen, konvexen Punktmengen von $E^n$, so kann in den Sätzen 2 und 3 die Einzigkeitsfrage restlos erledigt werden, sofern man nur annimmt, daß in (6.5) für homothetische $A, B$ das Gleichheitszeichen steht. Der diesbezügliche Satz (in unvollständiger Form) wurde zunächst von HERBERT KNOTHE formuliert und (viel später) mit anderen Methoden bewiesen[18]).

**Satz 4.** *Besteht $2^G$ aus allen offenen, konvexen beschränkten Punktmengen von $E^n$ und steht in* (6.5) *das Gleichheitszeichen, sobald $A, B$ homothetisch sind, so gilt*

$$I(g_{A+B})^{1/r+n} \geqq I(g_A)^{1/r+n} + I(g_B)^{1/r+n} \tag{7.1}$$

*und das Gleichheitszeichen tritt dann und nur dann ein, wenn $A, B$ homothetisch sind.*

Beweis. Man bilde, ähnlich wie in 3., $A$ und $B$ ($A, B$ konvex und offen) auf das Innere des Würfels $W_0$ durch die Brunn-Minkowski-Schmidtsche Transformation ab und beachte, daß der Ausdruck (3.6) (mit $A, B$ an Stelle von $A_1, A_2$) zwischen $g_0^{A+B}$ und

$$I = \left\{(g_0^A)^{1/r+n} + (g_0^B)^{1/r+n}\right\}^{r+n}$$

liegt. Sind nun diese Ausdrücke gleich, so muß für jedes $\tau \in W_0^*$

$$\left\{(g_n^A)^{1/r} + (g_n^B)^{1/r}\right\}^r \cdot \prod_1^n \left\{\frac{g_{k-1}^A}{g_k^A} + \frac{g_{k-1}^B}{g_k^B}\right\}$$

gleich $I$ sein. Das hat nun zur Folge[19]), daß die Quotienten

$$\varphi_{k-1} = \frac{g_{k-1}^A}{g_k^A} : \frac{g_{k-1}^B}{g_k^B} \quad (k = 1, 2, \ldots, n+1) \tag{7.2}$$

---

[18]) Es entspricht nicht ganz dem Geist moderner Forschung, wenn ich diesen Satz als Ganzes KNOTHE zuschreibe. Was KNOTHE in seinem Bericht während der Mathematiker-Tagung in Tübingen im Jahre 1946 ohne Beweis mitgeteilt hat (man vgl. Bericht über die Mathematiker-Tagung in Tübingen, H. Laupp, Tübingen 1946, S. 91—92), ist nur die Ungleichung (7.1). An Stelle der Voraussetzung (6.5) wird dort lediglich die Forderung der logarithmischen Konkavität von $g_A$ (in bezug auf die Minkowskische lineare Kombination) gestellt, jedoch wird in dem kurzen Bericht kein Anhaltspunkt gegeben, wie man dann den Beweis durchführen soll. Später, im Juni 1956, nach Beendigung der Redaktion dieser Arbeit, hat mir Herr KNOTHE brieflich einen Beweis skizziert, der sich auf die zunächst von ihm entwickelte, allgemeine Methode der Sehnenpotenzenintegrale stützt. Es besteht jedoch kaum Zweifel, daß er auch auf den vollen Satz 4 gekommen wäre, falls er in der eingeschlagenen Richtung weitergeforscht hätte. Aus diesem Grunde scheint mir die Benennung des Satzes nach ihm vollkommen gerechtfertigt.

[19]) Man vgl. z.B. Fußnote [6]).

mit $g_{n+1}^A = g_{n+1}^B = 1$ die Bedingungen

$$\varphi_k = \varphi(\tau_1, \ldots, \tau_n) \qquad (k = 1, 2, \ldots, n)$$

und $\varphi_n = \varphi(\tau_1, \ldots, \tau_n)^r$ erfüllen müssen. Multipliziert man die Gln. (7.2) miteinander, so erhält man

$$\varphi(\tau_1, \ldots, \tau_n)^{r+n} = g_0^A / g_0^B$$

und mithin ist $\varphi$ konstant.

Nun ist mit $x(x_1, \ldots, x_n) \in A$, $y(y_1, \ldots, y_n) \in B$ und $x_1 = x_1(\tau_1)$, $y_1 = y_1(\tau_1)$

$$\frac{g_1^A(x_1)}{g_0^A} \frac{dx_1}{d\tau_1} = \frac{g_1^B(x_1)}{g_0^B} \frac{dy_1}{d\tau_1} \tag{7.3}$$

und somit auch

$$\frac{dx_1}{d\tau_1} = C \frac{dy_1}{d\tau_1} \tag{7.4}$$

mit einem konstanten $C > 0$. Jetzt denke man sich die Körper $A, B$ auf Schwerpunkte der Massenbelegungen $g_n^A$ bzw. $g_n^B$ bezogen. Dann gilt

$$\frac{1}{g_0^A} \int_{-\infty}^{+\infty} x_1 g_1^A(x_1)\, dx_1 = \frac{1}{g_0^B} \int_{-\infty}^{+\infty} y_1 g_1^B(y_1)\, dy_1 = 0$$

und somit muß $x_1(\tau_1) = C y_1(\tau_1)$ sein. Läßt man hier $\tau_1 \to 1$ konvergieren, so erhält man das Ergebnis (da die Richtung der $x_1$-Achse beliebig gewählt werden kann), daß die Stützfunktionen $p_A, p_B$ der beiden Körper $A, B$ proportional sein müssen. Das beweist die Homothetie von $A$ und $B$. Da nun in diesem Falle auch das Gleichheitszeichen in (6.5) gilt, so muß in (7.1) das Gleichheitszeichen stehen. Wie man leicht feststellt, können die Sätze 3 und 4 ohne wesentliche Schwierigkeit auf diejenigen Halbmoduln übertragen werden, die aus allen offenen Punktmengen bestehen, die sich als Vereinigung von endlich vielen offenen, konvexen Punktmengen darstellen lassen. Wir gehen darauf nicht näher ein.

Herrn Dr. W. Felscher habe ich für kritische Durchsicht des druckfertigen Manuskripts zu danken. Ebenfalls Herrn Dr. W. Jehne für kritische Hilfe bei der Korrekturarbeit.

*Mathematisches Institut der Freien Universität, Berlin-Dahlem*

*(Eingegangen am 15. Februar 1957)*

HUPPERT, B.
Math. Zeitschr. Bd. 68, S. 126—150 (1957)

# Zweifach transitive, auflösbare Permutationsgruppen

Von
BERTRAM HUPPERT

Eine Übersicht über alle mehrfach transitiven Permutationsgruppen ist trotz zahlreicher Bemühungen bis heute nicht gelungen. Man weiß nicht einmal, ob es außer den symmetrischen und alternierenden Gruppen noch weitere sechsfach transitive Gruppen gibt. Die dreifach transitiven, auflösbaren Gruppen (sogar eine etwas umfangreichere Klasse) wurden kürzlich bestimmt (HUPPERT [2]); es zeigte sich, daß die symmetrischen Gruppen in drei und vier Ziffern die einzigen Gruppen dieser Art sind. Dies legt die Vermutung nahe, daß es überhaupt nur wenige mehrfach transitive, auflösbare Permutationsgruppen gibt.

Der Grad einer zweifach transitiven (sogar einer primitiven), auflösbaren Permutationsgruppe ist bekanntlich eine Primzahlpotenz, und zu jedem Primzahlpotenzgrad $p^n$ lassen sich triviale Beispiele von zweifach transitiven, auflösbaren Gruppen angeben, nämlich die Gruppe $\mathfrak{Z}(p^n)$ aller semilinearen Abbildungen

$$x \to a\, x^{p^b} + c$$

über dem Galois-Feld $GF(p^n)$ und geeignete Untergruppen dieser Gruppe. Es soll nun gezeigt werden, daß dies, abgesehen von endlich vielen Ausnahmen, schon alle zweifach transitiven, auflösbaren Permutationsgruppen sind. Wir beweisen folgenden Satz:

Hauptsatz. Sei $\mathfrak{G}$ eine zweifach transitive, auflösbare Permutationsgruppe vom Grad $p^n$. Dann gilt bei geeigneter Bezeichnung der permutierten Symbole $\mathfrak{G} \leqq \mathfrak{Z}(p^n)$, ausgenommen die Grade $p^n = 3^2,\ 5^2,\ 7^2,\ 11^2,\ 23^2,\ 3^4$.

Für die ausgenommenen Grade treten noch weitere Typen auf. Alle diese geben wir, entsprechend der für primitive, auflösbare Permutationsgruppen immer möglichen Beschreibungsweise, als inhomogene lineare Abbildungen an. Da diese Gruppen stets die volle Translationsgruppe $\mathfrak{T}$ enthalten, genügt die Angabe derjenigen Untergruppe $\mathfrak{G}^0$, welche den Vektor $(0, \ldots, 0)$ fest läßt. Die gesuchte Permutationsgruppe ist dann das Produkt von $\mathfrak{G}^0$ mit der vollen Translationsgruppe $\mathfrak{T}$.

$$p^n = 3^2\colon \quad \mathfrak{G}^0_{3^2,1} = \{A, B, C, D\} \quad \text{und} \quad \mathfrak{G}^0_{3^2,2} = \{A, B, C\}$$

mit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix},\quad B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\quad C = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix},\quad D = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

wobei alle Matrixelemente aus $GF(3)$ zu nehmen sind.

$p^n = 5^2$: $\mathfrak{G}^0_{5^2,1} = \{A, B, C, D, 2E\}$, $\mathfrak{G}^0_{5^2,2} = \{A, B, C, 2E\}$
und $\mathfrak{G}^0_{5^2,3} = \{A, B, C\}$
mit

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$$

über $GF(5)$.

$p^n = 7^2$: $\mathfrak{G}^0_{7^2,1} = \{A, B, C, D, 2E\}$ und $\mathfrak{G}^0_{7^2,2} = \{A, B, C, D\}$
mit

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}$$

über $GF(7)$.

$p^n = 11^2$: $\mathfrak{G}^0_{11^2,1} = \{A, B, C, D, 4E\}$ und $\mathfrak{G}^0_{11^2,2} = \{A, B, C, 4E\}$
mit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$$

über $GF(11)$.

$p^n = 23^2$: $\mathfrak{G}^0_{23^2} = \{A, B, C, D, 2E\}$
mit

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 6 & -3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ -5 & -2 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 4 & -6 \end{pmatrix}$$

über $GF(23)$.

$p^n = 3^4$: $\mathfrak{G}^0_{3^4,1} = \{A, B, C, D, F, G\}$, $\mathfrak{G}^0_{3^4,2} = \{A, B, C, D, F, G^2\}$
und $\mathfrak{G}^0_{3^4,3} = \{A, B, C, D, F\}$
mit

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$F = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

über $GF(3)$.

In § 3 und § 4 geben wir Relationen zwischen den Erzeugenden der Gruppen $\mathfrak{G}^0$ an, welche den Erweiterungstypus dieser Gruppen übersichtlich beschreiben.

Die Gruppen $\mathfrak{G}^0_{5^2,3}$, $\mathfrak{G}^0_{7^2,2}$, $\mathfrak{G}^0_{11^2,2}$, $\mathfrak{G}^0_{23^2}$ sind multiplikative Gruppen von endlichen Fastkörpern und finden sich in ZASSENHAUS [5], S. 216.

Nach Vorbereitungen und Hilfssätzen in § 1 bringen wir in § 2 den Beweis des Hauptsatzes in mehreren Schritten. Dabei erhalten wir gleichzeitig schon weitgehende Informationen über die Struktur der „Ausnahmegruppen". In § 3 bestimmen wir dann alle Ausnahmegruppen vom Grad $3^4$; dieser Fall ist der schwierigste, aber auch weitaus interessanteste. Die Ermittlung aller Ausnahmegruppen der Grade $3^2$, $5^2$, $7^2$, $11^2$, $23^2$, welche keine wesentlichen Schwierigkeiten bietet, folgt in § 4.

Beim Beweis des Hauptsatzes benutzen wir die Ergebnisse von HUPPERT [3], § 1 und § 2, insbesondere die Hilfssätze I bis III aus § 2. Die Kenntnis der weiteren Resultate von HUPPERT [3] ist für die vorliegende Arbeit nicht nötig.

### Bezeichnungen

$|\mathfrak{G}|$ = Ordnung von $\mathfrak{G}$; $\mathfrak{U} \leqq \mathfrak{G}$ bedeutet: $\mathfrak{U}$ ist Untergruppe von $\mathfrak{G}$, wobei auch $\mathfrak{U} = \mathfrak{G}$ zugelassen ist; $\mathfrak{U} < \mathfrak{G}$: $\mathfrak{U}$ ist Untergruppe von $\mathfrak{G}$, aber $\mathfrak{U} \neq \mathfrak{G}$; $\mathfrak{U} \trianglelefteq \mathfrak{G}$: $\mathfrak{U}$ ist Normalteiler von $\mathfrak{G}$; $\mathfrak{U} \lhd \mathfrak{G}$: $\mathfrak{U}$ ist Normalteiler von $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{U} \neq \mathfrak{G}$; $A(\mathfrak{G})$ = Automorphismengruppe von $\mathfrak{G}$; $\mathfrak{G}_p$ = $p$-Sylow-Gruppe von $\mathfrak{G}$; ${}_p\mathfrak{G}$ = $p$-Sylow-Komplement von $\mathfrak{G}$; $\mathfrak{Z}(\mathfrak{G})$ = Zentrum von $\mathfrak{G}$; $\mathfrak{G}'$ = Kommutatorgruppe von $\mathfrak{G}$; $(X, Y) = X Y X^{-1} Y^{-1}$; $\Phi(\mathfrak{G})$ = Frattini-Gruppe von $\mathfrak{G}$; ist $\mathfrak{G}$ eine $p$-Gruppe, so bezeichnen wir mit $\mathfrak{O}_\alpha(\mathfrak{G})$ das Erzeugnis aller $X^{p^\alpha}$ mit $X \in \mathfrak{G}$, mit $\Omega_\alpha(\mathfrak{G})$ das Erzeugnis aller $X \in \mathfrak{G}$ mit $X^{p^\alpha} = E$; $\mathfrak{N}(\mathfrak{U})$ = Normalisator der Untergruppe $\mathfrak{U}$ von $\mathfrak{G}$; $\mathfrak{C}(\mathfrak{U})$ = Zentralisator der Untergruppe $\mathfrak{U}$ von $\mathfrak{G}$; mit $p$ und $q$ bezeichnen wir stets Primzahlen; ist $p^a \mid m$, aber $p^{a+1} \nmid m$, so schreiben wir $p^a \top m$.

## § 1. Vorbemerkungen und Hilfssätze

Die zweifach transitive, auflösbare Permutationsgruppe $\mathfrak{G}$ enthält einen eindeutig bestimmten kleinsten Normalteiler $\mathfrak{T}$; dieser ist abelsch und besteht aus lauter regulären Permutationen. Die permutierten Symbole bezeichnen wir als Ziffern. Als Menge der Ziffern führen wir die $p^n$ Vektoren $\mathfrak{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ mit $x_i \in GF(p)$ ein. Dann können wir annehmen, daß $\mathfrak{T}$ aus den Permutationen

$$\begin{pmatrix} \mathfrak{x} \\ \mathfrak{x} + \mathfrak{t} \end{pmatrix},$$

den „Translationen" besteht; denn abgesehen von der Bezeichnung der Ziffern ist die reguläre Darstellung von $\mathfrak{T}$ eindeutig bestimmt. $\mathfrak{G}^0$ sei diejenige Untergruppe von $\mathfrak{G}$, welche den Vektor $(0, 0, \ldots, 0)$ fest läßt. Da $\mathfrak{T}$ regulär ist, gilt $\mathfrak{G} = \mathfrak{G}^0 \mathfrak{T}$ und $\mathfrak{G}^0 \cap \mathfrak{T} = \mathfrak{E}$. In $\mathfrak{G}$ ist $\mathfrak{T}$ eigener Zentralisator. Ist $G \in \mathfrak{G}^0$, so haben wir

$$G = \begin{pmatrix} \mathfrak{x} \\ f(\mathfrak{x}) \end{pmatrix},$$

wobei $f(\mathfrak{x})$ eine geeignete Vektorfunktion mit $f((0, 0, \ldots, 0)) = (0, 0, \ldots, 0)$ ist. Sei $T$ ein beliebiges Element von $\mathfrak{T}$. Aus $GTG^{-1} = T'$ mit

$$T = \begin{pmatrix} \mathfrak{x} \\ \mathfrak{x} + \mathfrak{t} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad T' = \begin{pmatrix} \mathfrak{x} \\ \mathfrak{x} + \mathfrak{t}' \end{pmatrix}$$

folgt[1]) $f(\mathfrak{x} + \mathfrak{t}) = f(\mathfrak{x}) + \mathfrak{t}'$ für alle Vektoren $\mathfrak{x}$. Für $\mathfrak{x} = (0, 0, \ldots, 0)$ ergibt sich wegen $f((0, 0, \ldots, 0)) = (0, 0, \ldots, 0)$ dann $f(\mathfrak{t}) = \mathfrak{t}'$, also $f(\mathfrak{x} + \mathfrak{t}) = f(\mathfrak{x}) + f(\mathfrak{t})$. Da aber $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{t}$ beliebig sind, folgt, daß $f$ eine lineare Abbildung bewirkt. Wir können daher $\mathfrak{G}^0$ als eine Gruppe von homogenen linearen Abbildungen vom Grad $n$ über $GF(p)$ auffassen. Die zweifache Transitivität von $\mathfrak{G}$ hat zur Folge, daß $\mathfrak{G}^0$ die von $(0, 0, \ldots, 0)$ verschiedenen Vektoren transitiv permutiert. Insbesondere ist also $\mathfrak{G}^0$ irreduzibel über $GF(p)$, und es gilt $p^n - 1 \mid |\mathfrak{G}^0|$.

Fortan werden wir stets $\mathfrak{G}^0$ als Untergruppe von $GL(n, p)$ auffassen.

Hilfssatz 1. Sei $\mathfrak{G}$ zweifach transitiv und auflösbar vom Grad $p^n$. Sei $\mathfrak{U}$ ein über $GF(p)$ reduzibler Normalteiler von $\mathfrak{G}^0$. Dann sind die Sylow-Gruppen $\mathfrak{U}_q$ von $\mathfrak{U}$ für $q > 2$ zyklisch, für $q = 2$ zyklisch oder verallgemeinerte Quaternionengruppen. Ist insbesondere $\mathfrak{U}$ eine Gruppe von Primzahlpotenzordnung, so ist $\mathfrak{U}$ selbst zyklisch oder eine verallgemeinerte Quaternionengruppe.

Beweis. Ist $\mathfrak{E} < \mathfrak{U} \trianglelefteq \mathfrak{G}^0$ und ist $\mathfrak{U}$ reduzibel über $GF(p)$, so ist $\mathfrak{T}\mathfrak{U}$ eine imprimitive, nichtreguläre Permutationsgruppe (s. HUPPERT [2]). Dann ist $\mathfrak{T}\mathfrak{U}$ als imprimitiver, nichtregulärer Normalteiler der zweifach transitiven Permutationsgruppe $\mathfrak{G}$ eine „Frobenius-Gruppe", d.h. die Identität ist die einzige Permutation von $\mathfrak{T}\mathfrak{U}$, welche zwei Ziffern fest läßt (MANNING [4], S. 88). $\mathfrak{U}$ ist daher eine Gruppe, deren sämtliche Matrizen nicht den Eigenwert $+1$ haben. Solche Gruppen sind von ZASSENHAUS in [5] untersucht worden. Von den dortigen Ergebnissen benötigen wir nur den Satz 3: Ist $\mathfrak{H}$ eine Gruppe von Matrizen ohne Eigenwert $+1$ und ist $|\mathfrak{H}|$ das Produkt von zwei (nicht notwendig verschiedenen) Primzahlen, so ist $\mathfrak{H}$ zyklisch. Wenden wir diesen Satz auf die Untergruppen von $\mathfrak{U}$ an! Es ergibt sich, daß $\mathfrak{U}$ keine Untergruppe vom Typ $(q, q)$ enthält. Daraus folgt sofort, daß die Sylow-Gruppen $\mathfrak{U}_q$ von $\mathfrak{U}$ nur eine Untergruppe der Ordnung $q$ haben. Dann sind die $\mathfrak{U}_q$ zyklisch für $q > 2$ und zyklisch oder verallgemeinerte Quaternionengruppen für $q = 2$ (ZASSENHAUS [6], S. 112).

Hilfssatz 2. Sei $\mathfrak{G}$ eine primitive und auflösbare Permutationsgruppe vom Grad $p^n$. Besitzt $\mathfrak{G}^0$ einen über $GF(p)$ irreduziblen abelschen Normalteiler $\mathfrak{A}$, so gilt bei geeigneter Bezeichnung der Ziffern $\mathfrak{G} \leq \mathfrak{S}(p^n)$.

Beweis. Sei $\mathfrak{A}$ der abelsche, über $GF(p)$ irreduzible Normalteiler von $\mathfrak{G}^0$. Dann ist $\mathfrak{A}$ zyklisch; ist $A$ ein erzeugendes Element von $\mathfrak{A}$, so ist das charakteristische Polynom $\varphi(x)$ von $A$ irreduzibel über $GF(p)$ (HUPPERT [3], Hilfssatz 2). Alle Eigenwerte von $A$ sind daher über $GF(p)$ konjugiert, sind also,

[1]) Abbildungen sind stets von rechts nach links zu lesen.

wenn wir $|\mathfrak{A}| = a$ setzen, primitive $a$-te Einheitswurzeln. Da jeder solche Eigenwert $\zeta$ der irreduziblen Gleichung $\varphi(x) = 0$ vom Grad $n$ über $GF(p)$ genügt, so gilt $\zeta \in GF(p^n)$, daher $a \mid p^n - 1$. Es ist $GF(p)(\zeta) = GF(p^n)$.

Die reguläre Darstellung von $\zeta$ auf $GF(p^n)$ vermittels $x \to \zeta x$ liefert eine Matrix $B$ vom Grad $n$ mit Koeffizienten aus $GF(p)$. Wir legen für $GF(p^n)$ über $GF(p)$ die Basis $1, \zeta, \zeta^2, \ldots, \zeta^{n-1}$ zugrunde. Ist

$$\varphi(x) = x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0,$$

so erhalten wir

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \ldots & -a_{n-1} \end{pmatrix}.$$

$B$ hat den Eigenwert $\zeta$. Somit haben $A$ und $B$ den Eigenwert $\zeta$ gemeinsam. Da aber $\zeta$ über $GF(p)$ genau $n$ Konjugierte hat, haben $A$ und $B$ über $GF(p)$ das gleiche irreduzible charakteristische Polynom, sind mithin über $GF(p)$ ähnlich. Daher gibt es eine nichtsinguläre Matrix $P$ vom Grad $n$ mit Koeffizienten aus $GF(p)$ und mit $PAP^{-1} = B$. Wir deuten jetzt $P$ als Permutation aus der symmetrischen Gruppe $\mathfrak{S}_{p^n}$. Dann gilt $P\mathfrak{T}P^{-1} = \mathfrak{T}$ und

$$\overline{\mathfrak{G}} = P\mathfrak{G}P^{-1} = P\mathfrak{T}P^{-1}P\mathfrak{G}^0P^{-1} = \mathfrak{T}P\mathfrak{G}^0P^{-1} \rhd \mathfrak{T}P\mathfrak{A}P^{-1} = \mathfrak{T}\{B\}.$$

Also unterscheiden sich $\mathfrak{G}$ und $\overline{\mathfrak{G}}$ nur durch die Bezeichnung der permutierten Ziffern. Ohne Einschränkung der Allgemeinheit können wir daher annehmen, daß nach Einführung der neuen Ziffernmenge $GF(p^n)$ gilt

$$\mathfrak{T} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ x+t \end{pmatrix} \mid t \in GF(p^n) \right\} \quad \text{und} \quad \mathfrak{A} = \{A\} \quad \text{mit} \quad A = \begin{pmatrix} x \\ \zeta x \end{pmatrix}.$$

Sei nun $G \in \mathfrak{G}^0$, $G = \begin{pmatrix} x \\ f(x) \end{pmatrix}$ mit $f(0) = 0$. Zu Beginn dieses Paragraphen sahen wir (mit $\xi$ statt $x$), daß $f(x+t) = f(x) + f(t)$, also $f$ eine lineare Abbildung über $GF(p)$ ist.

$G$ bewirkt einen Automorphismus in $\mathfrak{A}$. Somit gilt mit einer geeigneten ganzen Zahl $u$, welche zu $a$ teilerfremd ist, für alle ganzen $s$

$$A^{su}G = GA^s.$$

Daraus folgt

$$\zeta^{us} f(x) = f(\zeta^s x)$$

für alle $x \in GF(p^n)$. Setzen wir speziell $x = 1$, so bekommen wir

$$\zeta^{us} f(1) = f(\zeta^s).$$

Mit $f(1) = b^{-1}$ erhalten wir

$$\zeta^{us} = b f(\zeta^s),$$

also

$$b f(\zeta^s) f(x) = f(\zeta^s x).$$

Für $g(x) = bf(x)$ ergibt sich dann

$$g(\zeta^s)\, g(x) = g(\zeta^s x).$$

Auch $g(x)$ ist eine lineare Abbildung über $GF(p)$. Da aber $\zeta$ ein erzeugendes Element von $GF(p^n)$ über $GF(p)$ ist, gilt nun für alle $x, y$ aus $GF(p^n)$ die Gleichung $g(xy) = g(x)\, g(y)$. Mithin ist $x \to g(x)$ ein Automorphismus von $GF(p^n)$. Dann hat aber $g(x)$ bekanntlich die Gestalt

$$g(x) = x^{p^\sigma}.$$

Damit erhalten wir nun

$$f(x) = f(1)\, x^{p^\sigma},$$

womit nachgewiesen ist, daß ganz $\mathfrak{G}$ aus semilinearen Abbildungen über $GF(p^n)$ besteht.

Hilfssatz 3. Ist $\mathfrak{G}^0$ transitiv auf den von $(0, 0, \ldots, 0)$ verschiedenen Vektoren, so ist $\mathfrak{G}^0$, aufgefaßt als Untergruppe von $GL(n, p)$, primitiv über $GF(p)$. Insbesondere zerfällt dann jeder über $GF(p)$ reduzible Normalteiler von $\mathfrak{G}^0$ in lauter äquivalente irreduzible Bestandteile.

Beweis. Angenommen, $\mathfrak{G}^0$ sei imprimitiv über $GF(p)$. Wir wählen das Koordinatensystem so, daß die Imprimitivitätsgebiete $\mathfrak{r}_i$ von $\mathfrak{G}^0$ durch Gleichungen der Gestalt $x_s = 0$ $(s = (i-1)j+1, \ldots, ij$ mit $n = jk)$ beschrieben werden. Dann liegt der Vektor $(1, 0, 0, \ldots, 0)$ im ersten Imprimitivitätsgebiet $\mathfrak{r}_1$, sein Bild unter einem Element $G \in \mathfrak{G}^0$ etwa im $i$-ten Imprimitivitätsgebiet $\mathfrak{r}_i$. Der Bildvektor von $(1, 0, 0, \ldots, 0)$ hat dann sicher Komponenten mit dem Wert 0, ist also von dem Vektor $(1, 1, \ldots, 1)$ verschieden. Das widerspricht jedoch der Transitivität von $\mathfrak{G}^0$ auf den von $(0, 0, \ldots, 0)$ verschiedenen Vektoren. Also kann $\mathfrak{G}^0$ über $GF(p)$ nicht imprimitiv sein. Mit Hilfe von [3], Satz 2 folgt nun, daß jeder über $GF(p)$ reduzible Normalteiler von $\mathfrak{G}^0$ in äquivalente, über $GF(p)$ irreduzible Bestandteile zerfällt.

Hilfssatz 4. Sei $\mathfrak{G}^0$ transitiv auf den von $(0, 0, \ldots, 0)$ verschiedenen Vektoren. $\mathfrak{G}^0$ enthalte eine Quaternionengruppe $\mathfrak{Q}$ als Normalteiler. Fassen wir wieder $\mathfrak{G}^0$ als Untergruppe von $GL(n, p)$ auf, so ist dann $\mathfrak{Q}$ irreduzibel über $GF(p)$.

Beweis. Wegen der Irreduzibilität von $\mathfrak{G}^0$ über $GF(p)$ ist sicher $p \neq 2$; denn eine über $GF(p)$ irreduzible Gruppe besitzt keinen von $\mathfrak{E}$ verschiedenen Normalteiler von $p$-Potenzordnung ([3], Hilfssatz 1). Die Quaternionengruppe $\mathfrak{Q}$ besitzt über jedem Primkörper $GF(p)$ mit $p \neq 2$ genau eine treue, irreduzible Darstellung; diese ist absolut irreduzibel und wird vermittelt durch die Matrizen (s. [3], S. 506)

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B = \begin{pmatrix} i & j \\ j & -i \end{pmatrix}$$

mit $i^2 + j^2 = -1$.

Angenommen, $\mathfrak{Q}$ zerfalle über $GF(p)$ bei geeigneter Wahl der Koordinaten. Die irreduziblen Bestandteile von $\mathfrak{Q}$ sind dann äquivalent zu der eben angegebenen Darstellung von $\mathfrak{Q}$, sind daher alle äquivalent und sogar absolut

irreduzibel. Dann lassen sich alle Matrizen aus $\mathfrak{G}^0$ in Kronecker-Produkte $G_1 \times G_2$ zerlegen, wobei die $G_i$ bis auf Faktoren aus $GF(p)$ bestimmt sind ([3], Satz 3). Dabei ist Grad $G_2 = 2$. Ein beliebiges $G \in \mathfrak{G}^0$ hat nun die Gestalt

$$G = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} & \cdots \\ a_{11}b_{21} & \cdots \\ a_{21}b_{11} & \cdots \\ a_{21}b_{21} & \cdots \\ \vdots & \end{pmatrix}.$$

Das Bild des Vektors $(1, 0, 0, \ldots, 0)$ unter $G$ ist dann

$$(a_{11}b_{11},\ a_{11}b_{21},\ a_{21}b_{11},\ a_{21}b_{21}, \ldots),$$

und dieser Vektor ist sicher verschieden von $(1, 0, 0, 1, \ldots)$. Das widerspricht aber der Transitivität von $\mathfrak{G}^0$ auf den von $(0, 0, \ldots, 0)$ verschiedenen Vektoren. Also kann $\mathfrak{G}^0$ nicht über $GF(p)$ reduzibel sein.

## § 2. Beweis des Hauptsatzes

Nach den Hilfssätzen 2 und 3 können wir annehmen, daß alle abelschen Normalteiler von $\mathfrak{G}^0$ über $GF(p)$ zerfallen, und zwar in lauter äquivalente, über $GF(p)$ irreduzible Teile. Wir unterscheiden nun zwei Fälle:

Fall A. Alle abelschen Normalteiler von $\mathfrak{G}^0$ zerfallen über $GF(p)$ in lauter gleiche Bestandteile vom Grad 1, bestehen also nur aus Matrizen der Gestalt $aE$.

Fall B. Es gibt einen abelschen Normalteiler $\mathfrak{A}$ von $\mathfrak{G}^0$, der über $GF(p)$ in lauter äquivalente, irreduzible Bestandteile vom Grad $k$ mit $1 < k < n$ zerfällt.

Schritt 1. Vorläufige Betrachtung des Falles A.

Nun besteht jeder abelsche Normalteiler von $\mathfrak{G}^0$ aus Matrizen der Gestalt $aE$ mit $a \in GF(p)$. Alle diese Matrizen bilden den maximalen abelschen Normalteiler $\mathfrak{Z} = \mathfrak{Z}(\mathfrak{G}^0)$ von $\mathfrak{G}^0$. Offenbar ist $|\mathfrak{Z}| \mid p-1$ und $p \neq 2$.

Sei $\mathfrak{N}$ ein minimaler nichtabelscher Normalteiler von $\mathfrak{G}^0$. Wir können annehmen, daß es einen solchen gibt; denn andernfalls wäre $\mathfrak{G}^0$ abelsch, und wegen der Irreduzibilität von $\mathfrak{G}^0$ über $GF(p)$ wäre $\mathfrak{G}$ nach Hilfssatz 2 eine Gruppe von semilinearen Abbildungen über $GF(p^n)$. Nun sind wegen $\mathfrak{N} \leq \mathfrak{C}(\mathfrak{Z}) = \mathfrak{G}^0$ die Voraussetzungen von [3], Hilfssatz I mit $\mathfrak{Z}$ statt $\mathfrak{A}$ erfüllt. Daher ist $\mathfrak{N}$ nilpotent von der Klasse 2 und hat Primzahlpotenzordnung $q^b$ ([3], Hilfssatz I.1). Ferner ist $q \mid p-1$ ([3], Hilfssatz I.6). Wegen $\mathfrak{Z}(\mathfrak{N}) \leq \mathfrak{Z}$ ([3], Hilfssatz I.3 mit $\mathfrak{Z}$ statt $\mathfrak{A}$) gilt $\mathfrak{C}(\mathfrak{Z}(\mathfrak{N})) = \mathfrak{G}^0$.

Schritt 2. Ausschließung des Falles A für $q > 2$.

$\mathfrak{N}$ ist irreduzibel über $GF(p)$; denn andernfalls wäre $\mathfrak{N}$ (da von ungerader Ordnung) nach Hilfssatz 1 zyklisch, entgegen $\mathfrak{N}' \neq \mathfrak{E}$. Nach [3], Hilfssatz III.3 ist wegen $q \mid p-1$ dann $\mathfrak{N}$ absolut irreduzibel und $n = q^m$ mit $|\mathfrak{N}/\mathfrak{Z}(\mathfrak{N})| = n^2 = q^{2m}$.

Da $\mathfrak{N}$ absolut irreduzibel ist, folgt aus dem Schurschen Lemma $\mathfrak{C}(\mathfrak{N}) = \mathfrak{Z}$. Die Faktorgruppe $\mathfrak{C}(\mathfrak{H})/\mathfrak{C}(\mathfrak{N})$ [mit $\mathfrak{H} = \mathfrak{N}/\mathfrak{Z}(\mathfrak{N})$] ist nach [3], Hilfssatz II.2 [mit $\mathfrak{C}(\mathfrak{Z}(\mathfrak{N})) = \mathfrak{G}^0$] isomorph zu einer Untergruppe des direkten Produktes von $2m$ zu $\mathfrak{Z}(\mathfrak{N})$ isomorphen Gruppen. Wegen $\mathfrak{Z}(\mathfrak{N}) \leqq \mathfrak{Z}$ und [3], Hilfssatz I.4 ist $|\mathfrak{Z}(\mathfrak{N})| = q$, daher $|\mathfrak{C}(\mathfrak{H})/\mathfrak{C}(\mathfrak{N})| \mid q^{2m}$. Nach [3], Hilfssatz II.3 ist $\mathfrak{G}^0/\mathfrak{C}(\mathfrak{H})$ isomorph zu einer Untergruppe der symplektischen Gruppe $C(2m, q)$. Damit erhalten wir nun

$$|\mathfrak{G}^0| = |\mathfrak{G}^0/\mathfrak{C}(\mathfrak{H})|\,|\mathfrak{C}(\mathfrak{H})/\mathfrak{Z}|\,|\mathfrak{Z}|\,|C(2m, q)|\,q^{2m}(p-1).$$

Mit $n = q^m$ und $p^n - 1 \mid |\mathfrak{G}^0|$ ist nun

(A) $$p^{q^m} - 1 \mid (p-1)\,q^{2m}(q^{2m}-1)\,q^{2m-1}(q^{2m-2}-1)\ldots(q^2-1)\,q.$$

Unter Beachtung von $q \mid p-1$ ergibt sich daraus

$$(p-1)^{q^m} < (p-1)^{1+2m+2m+2m-1+\cdots+2+1} = (p-1)^{1+3m+2m^2},$$

also $q^m < 1 + 3m + 2m^2$.

$q = 3$: Aus $3^m < 1 + 3m + 2m^2$ folgt $m \leqq 3$.

$q = 5$: Nun bleibt nur die Möglichkeit $m = 1$.

$q > 7$: Die Ungleichung $q^m < 1 + 3m + 2m^2$ ist nun für kein $m$ erfüllt.

Es sind also noch die Fälle $q = 3$ und $q = 5$ zu betrachten.

Für $q = 3$ ist $3 \mid p-1$. Daraus ergibt sich leicht

(X) $$3^s \top \frac{p^{3^s}-1}{p-1}.$$

Für $m = 1$ haben wir die Beziehung $\frac{p^3-1}{p-1} \mid 3^2(3^2-1)3$. Dann ist wegen (X) sogar $\frac{p^3-1}{p-1} = p^2 + p + 1 \mid 3\,2^3 = 24$. Aber wegen $p > 3$ ist dies unmöglich.

Im Falle $m = 2$ ist gefordert $\frac{p^{3^2}-1}{p-1} \mid 3^4(3^4-1)3^3(3^2-1)3$. Durch genaue Abschätzung der 3-Potenz gemäß (X) bekommen wir $\frac{p^{3^2}-1}{p-1} \mid 3^2 2^7 5$ und dann $p^8 < 3^2 2^7 5 < 2^{4+7+3} = 2^{14}$. Nun ergibt sich $p < 4$, was aber wegen $p \equiv 1\,(3)$ unmöglich ist.

Wenn wir sofort (X) berücksichtigen, erhalten wir für $m = 3$

$$\frac{p^{3^3}-1}{p-1} \mid 3^3(3^6-1)(3^4-1)(3^2-1).$$

Es folgt $p^{26} < 3^{3+6+4+2} = 3^{15}$; aber wegen $p > 3$ geht dies nicht.

Für $q = 5$ bekommen wir mit $m = 1$ und $5 \mid p-1$ wegen $5^s \top \frac{p^{5^s}-1}{p-1}$ [analog (X)] $\frac{p^5-1}{p-1} \mid 5(5^2-1)$, daher $p^4 < 120$ und dann $p < 5$, entgegen der Feststellung $5 \mid p-1$.

Damit haben wir gesehen, daß Fall A für $q > 2$ nicht eintreten kann.

Schritt 3. Eine Abschätzung von $|\mathfrak{G}^0|$ im Falle A für $q = 2$.

Nach [3], Hilfssatz I.5 haben die Elemente von $\mathfrak{N}$ höchstens die Ordnung 4. In Schritt 1 zeigten wir schon, daß $\mathfrak{C}(\mathfrak{Z}(\mathfrak{N})) = \mathfrak{G}^0$.

Zunächst nehmen wir an, daß $\mathfrak{N}$ über $GF(p)$ reduzibel ist. Nach Hilfssatz 1 ist dann $\mathfrak{N}$ eine verallgemeinerte Quaternionengruppe. Da aber alle Elemente von $\mathfrak{N}$ höchstens die Ordnung 4 haben, ist $\mathfrak{N}$ die Quaternionengruppe der Ordnung 8. In Hilfssatz 4 war jedoch gezeigt worden, daß $\mathfrak{N}$ unter diesen Umständen nicht über $GF(p)$ reduzibel sein kann.

Also ist $\mathfrak{N}$ irreduzibel über $GF(p)$. Über einem genügend großen Erweiterungskörper von $GF(p)$ zerfalle $\mathfrak{N}$ in $s$ absolut irreduzible Bestandteile $F_i(\mathfrak{N})$; diese sind treu und haben alle den gleichen Grad $k$ ([3], Hilfssatz 3). Auf die Darstellungen $F_i(\mathfrak{N})$ von $\mathfrak{N}$ können wir nun [3], Hilfssatz III.2 anwenden und erhalten $|\mathfrak{N}/\mathfrak{Z}(\mathfrak{N})| = k^2 = 2^{2m}$, also $k = 2^m$ und dann $n = s\,2^m$. Ist $p \equiv 1\,(4)$, so ist $\mathfrak{N}$ nach [3], Hilfssatz III.3 (mit $f = 1$) absolut irreduzibel und daher $s = 1$. Da die Elemente von $\mathfrak{N}$ höchstens die Ordnung 4 haben und $\mathfrak{Z}(\mathfrak{N})$ zyklisch ist, folgt $|\mathfrak{Z}(\mathfrak{N})|\,|\,4$. Für $p \not\equiv 1\,(4)$ ist wegen $|\mathfrak{Z}(\mathfrak{N})|\,|\,p-1$ sicher $|\mathfrak{Z}(\mathfrak{N})| = 2$.

Da $\mathfrak{N}$ über $GF(p)$ irreduzibel ist, ist $\mathfrak{C}(\mathfrak{N}) = \mathfrak{Z}$ nach [3], Hilfssatz II.1. Aus [3], Hilfssatz II.2 folgt $|\mathfrak{C}(\mathfrak{H})/\mathfrak{C}(\mathfrak{N})|\,|\,|\mathfrak{Z}(\mathfrak{N})|^{2m}$. [3], Hilfssatz II.3 zeigt uns, daß $\mathfrak{G}^0/\mathfrak{C}(\mathfrak{H})$ zu einer Untergruppe der symplektischen Gruppe $C(2m, q)$ isomorph ist. Damit bekommen wir folgende Beziehungen:

(B) $$p^{s\,2^m} - 1 \,|\, (p-1)\,2^{2m}(2^{2m}-1)\,2^{2m-1}(2^{2m-2}-1)\ldots(2^2-1)\,2$$

für $p \not\equiv 1\,(4)$

und

(C) $$p^{2^m} - 1 \,|\, (p-1)\,2^{4m}(2^{2m}-1)\,2^{2m-1}(2^{2m-2}-1)\ldots(2^2-1)\,2$$

für $p \equiv 1\,(4)$.

Die maximale 2-Potenz, welche in

$$\frac{p^{s\,2^m}-1}{p-1}$$

auftritt, läßt sich genauer abschätzen. Für $p \equiv 1\,(4)$ gilt nämlich [entsprechend (X) auf S. 133]

(Y) $$2^m \top \frac{p^{2^m}-1}{p-1}.$$

Für $p \not\equiv 1\,(4)$ ist jedenfalls $p^2 \equiv 1\,(4)$. Aus (B) folgt nun

$$\frac{p^{s\,2^m}-1}{p-1} = \frac{p^{s\,2^m}-1}{p^2-1}\,(p+1)\,|\,2^{2m}\,|\,C(2m,2)|$$

und dann

$$p^{s\,2^m} - 1 \,|\, (p^2-1)\,2^{2m}\,|\,C(2m,2)|.$$

Mit $s = r\,2^t$, $2 \nmid r$ ist aber wegen $p^2 \equiv 1\,(4)$

(Z) $$2^{m+t-1} \top \frac{(p^2)^{s\,2^{m-1}}-1}{p^2-1}.$$

Somit bekommen wir als verschärfte Teilbarkeitsbedingungen:

(B′) für $p \not\equiv 1\,(4)$ mit $s = r\,2^t$ und $2 \nmid r$

$$p^{s\,2^m} - 1 \,|\, (p^2-1)\,2^{m+t-1}(2^{2m}-1)(2^{2m-2}-1)\ldots(2^2-1),$$

(C′) für $p \equiv 1\,(4)$

$$p^{2^m} - 1 \,|\, (p-1)\,2^m(2^{2m}-1)(2^{2m-2}-1)\ldots(2^2-1).$$

Nun schätzen wir $m$ ab:

I. Sei zunächst $p = 3$. Dann liefert uns (B′)

$$2^{r\,2^{m+t}} < 2^{3+m+t-1+m(m+1)}, \quad \text{also} \quad r\,2^{m+t} < 2 + t + 2m + m^2.$$

Mit $m + t = x$ folgt $2^x < 2 + 2x + x^2$, daher $x \leqq 5$ und auch $m \leqq 5$. Eine einfache Rechnung zeigt nun, daß für $m \leqq 3$ stets $r = 1$ und $t = 0$ oder $t = 1$ gilt, für $m = 4, 5$ immer $r = 1$ und $t = 0$, d.h. $s = 1$.

II. Nun sei $p > 3$ und $p \not\equiv 1\,(4)$. Unter Beachtung von $p - 1 > 4$ bekommen wir jetzt aus (B′) die Beziehung

$$(p-1)^{r\,2^{m+t}} < (p-1)^{1+3/2+m/2+t/2-1/2+m(m+1)/2}.$$

Dabei haben wir von $p + 1 < (p-1)^{3/2}$ Gebrauch gemacht. Nun wird

$$r\,2^{m+t} < 2 + t/2 + m + m^2/2.$$

Mit $m + t = x$ erhalten wir $2^x < 2 + x + x^2/2$, daraus $x \leqq 3$. Dann ist auch $m \leqq 3$, und eine einfache Rechnung zeigt, daß stets $s = 1$ gilt.

III. Schließlich sei $p \equiv 1\,(4)$. Aus (C′) entnehmen wir nun

$$(p-1)^{2^m} < (p-1)^{1+m/2+m(m+1)/2}$$

und dann

$$2^m < 1 + m + m^2/2, \quad \text{daher} \quad m \leqq 3.$$

Als Zwischenergebnis vermerken wir:

1. Für $p \not\equiv 1\,(4)$ ist $|\mathfrak{G}^0| \,|\, (p-1)\,2^{2m}\,|\overline{\mathfrak{G}}|$ mit $n = s\,2^m$. Dabei ist $\overline{\mathfrak{G}} = \mathfrak{G}^0/\mathfrak{C}(\mathfrak{H})$ isomorph zu einer auflösbaren Untergruppe der symplektischen Gruppe $C(2m, 2)$. $\overline{\mathfrak{G}}$ ist irreduzibel über $GF(2)$, da $\mathfrak{H}$ ein Hauptfaktor von $\mathfrak{G}^0$ ist. Für $p > 3$ gilt $m \leqq 3$ und $s = 1$. Für $p = 3$ ist $m \leqq 5$ und $s = 1$ für $m = 4, 5$, $s \leqq 2$ für $m \leqq 3$.

2. Für $p \equiv 1\,(4)$ ist $|\mathfrak{G}^0| \,|\, (p-1)\,2^{4m}\,|\overline{\mathfrak{G}}|$. Nun ist $\overline{\mathfrak{G}}$ eine auflösbare, über $GF(2)$ irreduzible Untergruppe von $C(2m, 2)$ mit $m \leqq 3$. Ferner ist $n = 2^m$.

Die weitere Untersuchung wird nun auf eine Teilbarkeitsrelation für $|\overline{\mathfrak{G}}|$ hinauslaufen. Diese stellen wir zunächst zurück und behandeln den Fall B.

Schritt 4. Vorläufige Betrachtung des Falles B.

Sei $\mathfrak{A}$ der nach unserer Annahme vorhandene abelsche Normalteiler von $\mathfrak{G}^0$, welcher in $r$ äquivalente, über $GF(p)$ irreduzible Teile $L(\mathfrak{A})$ des Grades $k > 1$ zerfällt. Es ist $n = kr$.

$\mathfrak{A}$ ist zyklisch, da es von $L(\mathfrak{A})$ treu und irreduzibel dargestellt wird ([3], Hilfssatz 2). Wir können $\mathfrak{A}$ maximal wählen, so daß $\mathfrak{A}$ in keinem abelschen Normalteiler von $\mathfrak{G}^0$ echt enthalten ist. Sei $A$ ein erzeugendes Element von $\mathfrak{A}$. Das charakteristische Polynom von $A$ ist, entsprechend der Zerlegung von $\mathfrak{A}$ in $r$ zu $L(\mathfrak{A})$ äquivalente Teile, die $r$-te Potenz eines über $GF(p)$ irreduziblen Polynoms. Die Eigenwerte von $A$, welche alle mit der genauen Vielfachheit $r$ vorkommen, genügen also einer über $GF(p)$ irreduziblen Gleichung vom Grad $k$, liegen daher in $GF(p^k)$. Mithin ist $|\mathfrak{A}| \mid p^k - 1$.

Der Zentralisator $\mathfrak{C}(\mathfrak{A})$ von $\mathfrak{A}$ in $\mathfrak{G}^0$ besteht aus Matrizen der Gestalt

$$(C_{ij}) \qquad i, j = 1, 2, \ldots, r,$$

wobei die Teilmatrizen $C_{ij}$ im Zentralisator von $L(\mathfrak{A})$ liegen. Sei $V = L(A)$. Wegen der Separabilität der charakteristischen Gleichung von $V$ über $GF(p)$ hat dann $V$ lauter verschiedene Eigenwerte. Die mit $V$ vertauschbaren Matrizen sind daher bekanntlich Polynome in $V$. Da die charakteristische Gleichung von $V$ über $GF(p)$ irreduzibel ist, fällt sie mit dem Minimalpolynom von $V$ über $GF(p)$ zusammen. Der Ring $GF(p)(V)$ ist daher isomorph zum Galois-Feld $GF(p^k)$, und die $C_{ij}$ bilden eine Darstellung $F$ von $GF(p^k)$ über $GF(p)$. Jedem Element $G$ aus $\mathfrak{C}(\mathfrak{A})$ ordnen wir nun ein Element $D(G)$ aus $GL(r, p^k)$ zu vermöge

$$G = (C_{ij}) \to D(G) = (c_{ij})$$

für $C_{ij} = F(c_{ij})$ mit $c_{ij} \in GF(p^k)$.

$\mathfrak{G}^0/\mathfrak{C}(\mathfrak{A})$ ist isomorph zu einer Untergruppe der Automorphismengruppe $A(\mathfrak{A})$ von $\mathfrak{A}$.

Ist $\mathfrak{A} = \mathfrak{C}(\mathfrak{A})$, so erhalten wir wegen $p^n - 1 \mid |\mathfrak{G}^0|$ die Beziehung

$$p^n - 1 \mid |\mathfrak{G}^0| \mid |\mathfrak{A}| \mid |A(\mathfrak{A})| \mid (p^k - 1)\varphi(p^k - 1).$$

Wegen $k \leq n/2$ folgt dann $p^n - 1 \leq (p^{n/2} - 1)^2$, was sicher nicht stimmt.

Wir können daher annehmen, daß $\mathfrak{A}$ eine eigentliche Untergruppe von $\mathfrak{C}(\mathfrak{A})$ ist. Dann ist $\mathfrak{C}(\mathfrak{A})$ sicher nicht abelsch, da $\mathfrak{A}$ ein maximaler abelscher Normalteiler von $\mathfrak{G}^0$ ist. Sei nun $\mathfrak{N}$ ein minimaler nichtabelscher, in $\mathfrak{C}(\mathfrak{A})$ liegender Normalteiler von $\mathfrak{G}^0$. Dann erfüllt $\mathfrak{N}$ die Voraussetzungen von [3], Hilfssatz I, hat daher die Klasse 2 und Primzahlpotenzordnung $q^b$. Aus $\mathfrak{E} < \mathfrak{N}' \leq \mathfrak{A}$ folgt $q \mid p^k - 1$.

Schritt 5. Ausschließung des Falles B für $q > 2$.

Nach Hilfssatz 1 ist $\mathfrak{N}$ irreduzibel über $GF(p)$. Dann ist auch die Darstellung $D(\mathfrak{N})$ von $\mathfrak{N}$ vom Grad $r$ über $GF(p^k)$ irreduzibel; eine Reduktion von $D(\mathfrak{N})$ über $GF(p^k)$ hätte nämlich eine Reduktion von $\mathfrak{N}$ über $GF(p)$ zur Folge. Nach [3], Hilfssatz III. 3 (mit $k$ statt $f$) ist wegen $q \mid p^k - 1$ dann $D(\mathfrak{N})$ absolut irreduzibel und $|\mathfrak{N}/\mathfrak{Z}(\mathfrak{N})| = r^2 = q^{2m}$, also $r = q^m$.

Aus [3], Hilfssatz I. 4 entnehmen wir, daß die von $E$ verschiedenen Elemente von $\mathfrak{N}$ alle die Ordnung $q$ haben. Daher ist $|\mathfrak{Z}(\mathfrak{N})| = q$, und die Ordnung der Automorphismengruppe $A(\mathfrak{Z}(\mathfrak{N}))$ von $\mathfrak{Z}(\mathfrak{N})$ teilt $q - 1$.

Der Zentralisator $\mathfrak{C}(\mathfrak{N})$ von $\mathfrak{N}$ in $\mathfrak{G}^0$ fällt mit $\mathfrak{N}$ zusammen ([3], Hilfssatz II.1). Ist $G \in \mathfrak{C}(\mathfrak{H})$ und $Z$ ein erzeugendes Element von $\mathfrak{Z}(\mathfrak{N})$, so haben wir für beliebige Elemente $X$, $Y$ aus $\mathfrak{N}$

$$X^G = XZ^a \quad \text{und} \quad Y^G = YZ^b.$$

Es folgt $(X, Y)^G = (X, Y)$ und wegen $\mathfrak{Z}(\mathfrak{N}) = \mathfrak{N}'$ dann $\mathfrak{C}(\mathfrak{H}) \leq \mathfrak{C}(\mathfrak{Z}(\mathfrak{N}))$. Nach [3], Hilfssatz II.3 ist $\mathfrak{C}(\mathfrak{Z}(\mathfrak{N}))/\mathfrak{C}(\mathfrak{H})$ isomorph zu einer Untergruppe von $C(2m, q)$. $\mathfrak{C}(\mathfrak{H})/\mathfrak{C}(\mathfrak{N})$ ist wegen $\mathfrak{C}(\mathfrak{H}) \leq \mathfrak{C}(\mathfrak{Z}(\mathfrak{N}))$ nach [3], Hilfssatz II.2 isomorph zu einer Untergruppe des $2m$-fachen direkten Produktes von $\mathfrak{Z}(\mathfrak{N})$ mit sich selbst, woraus $|\mathfrak{C}(\mathfrak{H})/\mathfrak{C}(\mathfrak{N})| \mid q^{2m}$ folgt. Wir bekommen nun

$$|\mathfrak{G}^0| = |\mathfrak{G}^0/\mathfrak{C}(\mathfrak{Z}(\mathfrak{N}))|\,|\mathfrak{C}(\mathfrak{Z}(\mathfrak{N}))/\mathfrak{C}(\mathfrak{H})|\,|\mathfrak{C}(\mathfrak{H})/\mathfrak{C}(\mathfrak{N})|\,|\mathfrak{C}(\mathfrak{N})|$$

und dann

$$|\mathfrak{G}^0| \mid (q-1)\,|C(2m, q)|\,q^{2m}(p^k - 1).$$

Mit $n = kr = k\,q^m$ folgt nun

$$\text{(D)} \qquad p^{k q^m} - 1 \mid (q-1)(p^k - 1)\,q^{2m}(q^{2m} - 1)\,q^{2m-1}(q^{2m-2} - 1) \ldots (q^2 - 1)\,q.$$

Wegen $q \mid p^k - 1$ erhalten wir

$$(p^k - 1)^{q^m} < (p^k - 1)^{1+1+2m+m(2m+1)},$$

also $q^m < 2 + 3m + 2m^2$.

$q = 3$: Aus $3^m < 2 + 3m + 2m^2$ folgt $m \leq 3$.

$q = 5$: Die Ungleichung $5^m < 2 + 3m + 2m^2$ liefert $m = 1$.
Falls $q > 7$, so ist die Ungleichung $q^m < 2 + 3m + 2m^2$ für kein $m$ erfüllt.

Sei zunächst $q = 3$. Dann ist $p^k \equiv 1\,(3)$. Daraus folgt

$$\text{(X')} \qquad 3^s \top \frac{p^{k\,3^s} - 1}{p^k - 1}.$$

Wir haben zu beachten, daß $k > 1$ ist.

$m = 1$: (D) ergibt nun

$$p^{3k} - 1 \mid 2(p^k - 1)\,3^2(3^2 - 1)\,3 = (p^k - 1)\,3^3 2^4$$

und dann wegen (X') sogar

$$p^{3k} - 1 \mid (p^k - 1)\,3\,2^4,$$

daher $p^{2k} < 48$. Aber $p^k \equiv 1\,(3)$ liefert uns dann $p^k = 4$, womit (D) nicht erfüllt ist. Somit ist $m = 1$ unmöglich.

$m = 2$: Nun haben wir

$$p^{9k} - 1 \mid 2(p^k - 1)\,3^4(3^4 - 1)\,3^3(3^2 - 1)\,3$$

und mit (X')

$$p^{9k} - 1 \mid (p^k - 1)\,2^8 3^2 5, \quad \text{also} \quad p^{8k} < 2^{8+4+3} = 2^{15} \text{ und } p^k < 4.$$

Dies ist aber wegen $k \geq 2$ nicht möglich.

$m=3$: Wenn wir sofort (X') berücksichtigen, besagt (D) nun

$$p^{27k}-1 \mid 2(p^k-1)\,3^3(3^6-1)(3^4-1)(3^2-1).$$

Es folgt $p^{26k}<3^{15}2$, was sicher nicht geht.

Für $q=5$ ist $m=1$ und $p^k \equiv 1\,(5)$. Wenn wir $5^s \top \frac{p^{k5^s}-1}{p^k-1}$ beachten, so liefert (D)

$$p^{5k}-1 \mid 4(p^k-1)\,5(5^2-1).$$

Daraus ergibt sich $p^{4k}<480$, also $p^k<5$ im Widerspruch zu $p^k \equiv 1\,(5)$.

Damit haben wir gesehen, daß Fall B mit $q>2$ nicht eintreten kann.

Schritt 6. Eine Abschätzung von $|\mathfrak{G}^0|$ im Falle B für $q=2$.

Nach [3], Hilfssatz I.5 hat $\mathfrak{N}$ nur Elemente, deren Ordnung 4 teilt. Angenommen, $\mathfrak{N}$ sei reduzibel über $GF(p)$. Nach Hilfssatz 1 ist dann $\mathfrak{N}$ eine verallgemeinerte Quaternionengruppe, dann aber wegen der eben gemachten Feststellung über die Ordnungen der Elemente von $\mathfrak{N}$ eine Quaternionengruppe. Dies ist jedoch nach Hilfssatz 4 ausgeschlossen. Also ist $\mathfrak{N}$ über $GF(p)$ irreduzibel, daher auch $D(\mathfrak{N})$ über $GF(p^k)$.

Nun betrachten wir die absolut irreduziblen Bestandteile von $D(\mathfrak{N})$. Diese sind alle treu und haben den gleichen Grad $t$ ([3], Hilfssatz 3). Aus [3], Hilfssatz III.2 entnehmen wir $|\mathfrak{N}/\mathfrak{Z}(\mathfrak{N})| = t^2 = 2^{2m}$. Zerfällt $D(\mathfrak{N})$ in $s$ absolut irreduzible Bestandteile, so erhalten wir $r=s2^m$ und $n=kr=ks2^m$. Für $p^k \equiv 1\,(4)$ ist $D(\mathfrak{N})$ nach [3], Hilfssatz III.3 absolut irreduzibel, so daß dann $s=1$ gilt.

Es ist $|\mathfrak{Z}(\mathfrak{N})| \mid 4$ und $|\mathfrak{Z}(\mathfrak{N})| \mid p^k-1$. $\{\mathfrak{C}(\mathfrak{H}) \cap \mathfrak{C}(\mathfrak{Z}(\mathfrak{N}))\}/\mathfrak{C}(\mathfrak{N})$ ist eine abelsche Gruppe, deren Ordnung $|\mathfrak{Z}(\mathfrak{N})|^{2m}$ teilt ([3], Hilfssatz II.2). Da $\mathfrak{N}$ über $GF(p)$ irreduzibel ist, ist $\mathfrak{C}(\mathfrak{N})=\mathfrak{A}$ ([3], Hilfssatz II.1). Wir erhalten damit

$$|\{\mathfrak{C}(\mathfrak{H}) \cap \mathfrak{C}(\mathfrak{Z}(\mathfrak{N}))\}/\mathfrak{A}| \begin{cases} \mid 2^{2m} & \text{für } p^k \not\equiv 1\,(4) \\ \mid 2^{4m} & \text{für } p^k \equiv 1\,(4). \end{cases}$$

Ferner haben wir noch

$$|\mathfrak{G}^0/\mathfrak{C}(\mathfrak{Z}(\mathfrak{N}))| = \begin{cases} 1 \text{ für } |\mathfrak{Z}(\mathfrak{N})|=2, \text{ also sicher für } p^k \not\equiv 1\,(4) \\ 1 \text{ oder } 2 \text{ für } |\mathfrak{Z}(\mathfrak{N})|=4. \end{cases}$$

Nach [3], Hilfssatz II.3 ist $\mathfrak{C}(\mathfrak{Z}(\mathfrak{N}))/\{\mathfrak{C}(\mathfrak{H}) \cap \mathfrak{C}(\mathfrak{Z}(\mathfrak{N}))\}$ isomorph zu einer Untergruppe der symplektischen Gruppe $C(2m, 2)$. Damit gelangen wir schließlich zu

$$|\mathfrak{G}^0| = |\mathfrak{G}^0/\mathfrak{C}(\mathfrak{Z}(\mathfrak{N}))|\,|\mathfrak{C}(\mathfrak{Z}(\mathfrak{N}))/\{\mathfrak{C}(\mathfrak{H}) \cap \mathfrak{C}(\mathfrak{Z}(\mathfrak{N}))\}|\,|\{\mathfrak{C}(\mathfrak{Z}(\mathfrak{N})) \cap \mathfrak{C}(\mathfrak{H})\}/\mathfrak{A}|\,|\mathfrak{A}|,$$

also für $p^k \not\equiv 1\,(4)$ $\quad |\mathfrak{G}^0| \mid |C(2m,2)|\,2^{2m}(p^k-1)$

und für $p^k \equiv 1\,(4)$ $\quad |\mathfrak{G}^0| \mid 2|C(2m,2)|\,2^{4m}(p^k-1)$.

Wegen $p^n-1 = p^{ks2^m}-1 \mid |\mathfrak{G}^0|$ ergibt sich nun

(E) $$\begin{cases} \text{für } p^k \not\equiv 1\,(4) \\ p^{ks2^m}-1 \mid (p^k-1)\,2^{2m}(2^{2m}-1)\,2^{2m-1}(2^{2m-2}-1)\ldots(2^2-1)\,2 \end{cases}$$

und

$$(F)\qquad \begin{cases} \text{für } p^k \equiv 1\,(4) \\ p^{k2^m}-1 \mid (p^k-1)\,2^{4m+1}(2^m-1)\,2^{2m-1}(2^{2m-2}-1)\ldots(2^2-1)\,2. \end{cases}$$

Für $p^k \equiv 1\,(4)$ berücksichtigen wir

$$(Y')\qquad 2^m \top \frac{p^{k2^m}-1}{p^k-1}.$$

Für $p^k \not\equiv 1\,(4)$ ist jedenfalls $p^{2k} \equiv 1\,(4)$ und dann mit $s = r2^t$, $2 \nmid r$ (s. S. 134)

$$(Z')\qquad 2^{m+t-1} \top \frac{p^{ks2^m}-1}{p^{2k}-1}.$$

Damit erhalten wir

$$(E')\qquad \begin{cases} \text{für } p^k \not\equiv 1\,(4) \text{ mit } s = r2^t \text{ und } 2 \nmid r \\ p^{ks2^m}-1 \mid (p^{2k}-1)\,2^{m+t-1}(2^{2m}-1)\,(2^{2m-2}-1)\ldots(2^2-1) \end{cases}$$

und

$$(F')\qquad \begin{cases} \text{für } p^k \equiv 1\,(4) \\ p^{k2^m}-1 \mid (p^k-1)\,2^m(2^{2m}-1)\,(2^{2m-2}-1)\ldots(2^2-1). \end{cases}$$

Nun schätzen wir $m$ ab:

I. Für $p^k \not\equiv 1\,(4)$ ist sicher $k$ ungerade, also wegen $k>1$ und $p>2$ (beachte $q=2 \mid p^k-1$!) dann $p^k \geqq 3^3$ und $p^k-1>2^4$. Damit folgt aus (E') unter Verwendung von $(p^k+1)<(p^k-1)^{3/2}$

$$(p^k-1)^{s2^m} < (p^k-1)^{1+3/2+m/4+t/4-1/4+m(m+1)/4}$$

und dann

$$s\,2^m < 2 + 1/4 + t/4 + m/2 + m^2/4.$$

Mit $t+m=x$ ergibt sich dann $2^x < 2+1/4+x/2+x^2/4$, daher $x \leqq 2$, also auch $m \leqq 2$ und dann nach einfacher Rechnung $s=1$.

II. Für $p^k \equiv 1\,(4)$ ist wegen $k>1$ sicher $p^k-1 \geqq 2^3$, und dann folgt aus (F')

$$(p^k-1)^{2^m} < (p^k-1)^{1+m/3+m(m+1)/3},$$

daher $2^m < 1+2m/3+m^2/3$. Diese Ungleichung ist jedoch für kein $m$ erfüllt.

Im Falle $p^k \not\equiv 1\,(4)$ war $\mathfrak{G}^0 = \mathfrak{C}(\mathfrak{Z}(\mathfrak{N}))$. Daher ist dann $\overline{\mathfrak{G}} = \mathfrak{G}^0/\mathfrak{C}(\mathfrak{H})$ isomorph zu einer Untergruppe von $C(2m, 2)$. Diese ist irreduzibel über $GF(2)$, da $\mathfrak{H}$ ein Hauptfaktor von $\mathfrak{G}^0$ ist ([3], Hilfssatz I.2).

Als Zwischenergebnis vermerken wir:

1. Für $p^k \not\equiv 1\,(4)$ ist $|\mathfrak{G}^0| \mid (p^k-1)\,2^{2m} \mid |\overline{\mathfrak{G}}|$, wobei $\overline{\mathfrak{G}}$ eine auflösbare, über $GF(2)$ irreduzible Untergruppe von $C(2m, 2)$ ist und dabei $n = k2^m$ mit $m \leqq 2$ gilt.

2. Der Fall B mit $p^k \equiv 1\,(4)$ tritt nicht auf.

Schritt 7. Eine Teilbarkeitsbeziehung für $|\overline{\mathfrak{G}}|$.

$\overline{\mathfrak{G}}$ ist eine auflösbare, über $GF(2)$ irreduzible Untergruppe von $GL(2m, 2)$ (s. S. 135 und S. 139); wir sehen davon ab, daß $\overline{\mathfrak{G}}$ sogar eine Untergruppe

von $C(2m, 2)$ ist. Nach den gleichen Richtlinien wie bei der Untersuchung von $\mathfrak{G}^0$ gehen wir nun vor. Dabei treten aber wesentliche Abweichungen gegenüber der früheren Situation auf:

Unsere Aufgabe ist einfacher, da wir jetzt den Primkörper $GF(2)$ vor uns haben, daher keine von $\mathfrak{E}$ verschiedenen Normalteiler der Gestalt $aE$ in $\overline{\mathfrak{G}}$ auftreten können. Ferner bringt die Gradabschätzung $2m \leqq 10$ (s. S. 135 und S. 139) wesentliche Erleichterungen mit sich. Andererseits haben wir den Hilfssatz 1, welcher uns die Irreduzibilität der minimalen nichtabelschen Normalteiler $\mathfrak{N}$ zeigte, für $\overline{\mathfrak{G}}$ nicht zur Verfügung.

Fall I. Wir nehmen zunächst an, daß $\overline{\mathfrak{G}}$ einen über $GF(2)$ irreduziblen abelschen Normalteiler besitzt. Zu $\overline{\mathfrak{G}}$ nehmen wir die volle Translationsgruppe $\overline{\mathfrak{T}}$ über $GF(2)$ vom Grad $2m$ hinzu. Hilfssatz 2 zeigt, daß $\overline{\mathfrak{T}}\,\overline{\mathfrak{G}}$ aus semilinearen Abbildungen über $GF(2^{2m})$ besteht. Also ist $|\overline{\mathfrak{G}}| \,|\, (2^{2m}-1)\,2m$, womit eine gute Abschätzung von $|\overline{\mathfrak{G}}|$ ermittelt ist.

Fall II. Nun zerfalle jeder abelsche Normalteiler von $\overline{\mathfrak{G}}$ über $GF(2)$ in lauter äquivalente, irreduzible Teile. Sei $\overline{\mathfrak{A}}$ ein maximaler abelscher Normalteiler von $\overline{\mathfrak{G}}$; er möge über $GF(2)$ in $j$ Teile $L(\overline{\mathfrak{A}})$ vom Grad $t>1$ zerfallen. Dann haben wir $|\overline{\mathfrak{A}}| \,|\, 2^t-1$, also $2 \nmid |\overline{\mathfrak{A}}|$. Wie in Schritt 4 ordnen wir nun $\mathfrak{C}(\overline{\mathfrak{A}})$ eine Untergruppe $D\big(\mathfrak{C}(\overline{\mathfrak{A}})\big)$ von $GL(j, 2^t)$ zu, wobei $D(\overline{\mathfrak{A}})$ aus Matrizen $aE$ mit $a \in GF(2^t)$ besteht. Ist $\mathfrak{C}(\overline{\mathfrak{A}})$ abelsch, so wird $\overline{\mathfrak{A}} = \mathfrak{C}(\overline{\mathfrak{A}})$ und dann $|\overline{\mathfrak{G}}| \,|\, (2^t-1)\,\varphi(2^t-1)$. Ist aber $\mathfrak{C}(\overline{\mathfrak{A}})$ nicht abelsch, so sei $\overline{\mathfrak{N}}$ ein minimaler nichtabelscher, in $\mathfrak{C}(\overline{\mathfrak{A}})$ liegender Normalteiler von $\overline{\mathfrak{G}}$. Nach [3], Hilfssatz I.1 hat $\overline{\mathfrak{N}}$ Primzahlpotenzordnung $r^d$, nach [3], Hilfssatz I.6 gilt $r \,|\, 2^t-1$, also $r \neq 2$. Gemäß [3], Hilfssatz III.1 läßt sich jede absolut irreduzible Darstellung von $\overline{\mathfrak{N}}$ in $GF(2^t)$ angeben. Nun zerfalle $D(\overline{\mathfrak{N}})$ über $GF(2^t)$ in $u$ Bestandteile $F_i(\overline{\mathfrak{N}})$. Diese sind treu: Denn wegen [3], Hilfssatz I.3 und I.4 gilt $|\,\mathfrak{Z}(\overline{\mathfrak{N}})| = r$. Also ist $\mathfrak{Z}(\overline{\mathfrak{N}})$ in jedem Normalteiler von $\overline{\mathfrak{N}}$ enthalten. Da aber ein erzeugendes Element $Z$ von $\mathfrak{Z}(\overline{\mathfrak{N}})$ bei $D(\overline{\mathfrak{N}})$ auf $aE$ mit $a \neq 1$ abgebildet wird, wird $\mathfrak{Z}(\overline{\mathfrak{N}})$ bei allen absolut irreduziblen Bestandteilen $F_i(\overline{\mathfrak{N}})$ von $D(\overline{\mathfrak{N}})$ nicht auf $E$ abgebildet. Also sind die $F_i(\overline{\mathfrak{N}})$ treu.

Nach [3], Hilfssatz III.2 haben die $F_i(\overline{\mathfrak{N}})$ den Grad $r^v$ mit $|\overline{\mathfrak{N}}/\mathfrak{Z}(\overline{\mathfrak{N}})| = r^{2v}$. Nun haben wir insgesamt $2m = j\,t = u\,t\,r^v$. Wegen $2m \leqq 10$ und $r \neq 2$ erhalten wir als einzige Möglichkeiten $2m = 6$ oder $2m = 10$. Aber $2m = 10$ ist ausgeschlossen: In diesem Falle müßte nämlich gelten $r = 5$ und dann $t = 2$, womit aber $r \,|\, 2^t-1$ nicht erfüllt ist. Somit bleibt nur $2m = 6$. Dann ist gewiß $u = 1$, daher $D(\overline{\mathfrak{N}})$ absolut irreduzibel vom Grad 3. Nach dem Schurschen Lemma gilt $\mathfrak{C}(\overline{\mathfrak{N}}) \cap \mathfrak{C}(\overline{\mathfrak{A}}) = \overline{\mathfrak{A}}$. Aus $t = 2$ folgt $|\overline{\mathfrak{A}}| = 3$. Nun bekommen wir

$$|\overline{\mathfrak{G}}| \,|\, |\overline{\mathfrak{G}}/\mathfrak{C}(\overline{\mathfrak{A}})| \,|\, |\mathfrak{C}(\overline{\mathfrak{N}})/\{\mathfrak{C}(\overline{\mathfrak{N}}) \cap \mathfrak{C}(\overline{\mathfrak{A}})\}| \,|\, |\{\mathfrak{C}(\overline{\mathfrak{N}}) \cap \mathfrak{C}(\overline{\mathfrak{A}})\}/\overline{\mathfrak{A}}| \,|\, |\overline{\mathfrak{A}}|$$

und daraus

$$|\overline{\mathfrak{G}}| \,|\, 2\,|C(2, 3)|\,3^2(2^2-1) = 3^4\,2^4.$$

Für die spätere Verwendung vermerken wir als Ergebnis:

Entweder gilt $|\overline{\mathfrak{G}}| \,|\, (2^t-1)\,\varphi(2^t-1)$ mit $1<t<2m$ und $t \,|\, 2m$ oder es ist $m = 3$ und $|\overline{\mathfrak{G}}| \,|\, 3^4\,2^4$.

Fall III. Nun gebe es einen über $GF(2)$ reduziblen abelschen Normalteiler $\overline{\mathfrak{A}}$ von $\overline{\mathfrak{G}}$, der inäquivalente irreduzible Bestandteile besitzt. Wir können annehmen, daß es einen maximalen abelschen Normalteiler $\overline{\mathfrak{A}}$ von $\overline{\mathfrak{G}}$ mit dieser Eigenschaft gibt; andernfalls würde nämlich Fall I oder Fall II vorliegen. Sei also

$$\overline{\mathfrak{A}} = \begin{pmatrix} L_1(\overline{\mathfrak{A}}) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & L_2(\overline{\mathfrak{A}}) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & L_j(\overline{\mathfrak{A}}) \end{pmatrix},$$

wobei jedes $L_i(\overline{\mathfrak{A}})$ über $GF(2)$ höchstens in äquivalente irreduzible Teile zerfällt und den Grad $t$ hat. Nun ist $\overline{\mathfrak{G}}$ imprimitiv ([3], Satz 2). Wir unterscheiden zwei Fälle:

III.1. Zunächst seien die $L_i(\overline{\mathfrak{A}})$ irreduzibel über $GF(2)$. Sei $\overline{\mathfrak{D}}$ derjenige Normalteiler von $\overline{\mathfrak{G}}$, welcher alle Imprimitivitätsgebiete in sich überführt. Die Bestandteile $D_i$ von $\overline{\mathfrak{D}}$ besitzen dann $L_i(\overline{\mathfrak{A}})$ als über $GF(2)$ irreduziblen abelschen Normalteiler, sind also wie unter Fall I Gruppen von homogenen semilinearen Abbildungen. Wir bekommen daher $|\overline{\mathfrak{D}}| \mid ((2^t-1)t)^j$. Die Faktorgruppe $\overline{\mathfrak{G}}/\overline{\mathfrak{D}}$ ist isomorph zu einer auflösbaren Untergruppe der symmetrischen Gruppe $\Xi_j$. Somit ergibt sich nun $|\overline{\mathfrak{G}}| \mid ((2^t-1)t)^j a$, wobei $a \mid j!$, aber $a$ für $j \geqq 5$ sicher von $j!$ verschieden ist.

III.2. Nun mögen die $L_i(\overline{\mathfrak{A}})$ über $GF(2)$ gemäß $L_i(\overline{\mathfrak{A}}) = E_w \times P_i(\overline{\mathfrak{A}})$ zerfallen. Da $P_i(\overline{\mathfrak{A}})$ von der identischen Darstellung verschieden ist und wir Gruppen über $GF(2)$ betrachten, ist Grad $P_i(\overline{\mathfrak{A}}) > 1$. Nun wenden wir die Betrachtungen von Fall II auf die Teile $D_i(\overline{\mathfrak{D}})$ von $\overline{\mathfrak{D}}$ an und erhalten das Ergebnis, daß entweder die $D_i(\overline{\mathfrak{D}})$ abelsch sind oder $2m$ einen Primteiler $r \neq 2$ enthält. Wegen $2m = jw$ Grad $P_i(\overline{\mathfrak{A}})$ enthält aber $2m$ mindestens drei Primteiler, womit im zweiten Falle $2m \geqq 12$ folgen würde. Für uns sind aber nur die Gruppen mit $2m \leqq 10$ von Interesse. Daher können wir annehmen, daß die $D_i(\overline{\mathfrak{D}})$ abelsch sind und dann $\overline{\mathfrak{A}} = \overline{\mathfrak{D}}$ gilt. Es ergibt sich nun $|\overline{\mathfrak{D}}| \mid (2^t-1)^j$ und $|\overline{\mathfrak{G}}| \mid (2^t-1)^j a$, wobei $a$ den gleichen Einschränkungen wie in III.1 unterliegt. Die jetzt erhaltene Abschätzung ist aber schärfer als die von III.1; daher braucht Fall III.2 später nicht gesondert betrachtet zu werden.

Schritt 8. Durchrechnung für Fall A mit $q = 2$.

Die in Schritt 7 erhaltenen Abschätzungen für $|\overline{\mathfrak{G}}|$ tragen wir nun in die am Ende von Schritt 3 vermerkten Bedingungen für $|\mathfrak{G}^0|$ ein. Die Fälle I bis III von Schritt 7 werden dabei getrennt betrachtet.

Fall I. Nach Schritt 7 ist nun $|\overline{\mathfrak{G}}| \mid (2^{2m}-1)2m$.

a) Sei zunächst $p \not\equiv 1\,(4)$ und $p > 3$. Nach unserem Ergebnis unter Schritt 3 ist $m \leqq 3$ und $s = 1$. Damit bekommen wir

$$p^{2m} - 1 \mid (p-1)\,2^{2m}(2^{2m}-1)\,2m.$$

Jetzt müssen wir die erlaubten $m$-Werte mit $m \leqq 3$ durchprüfen:

$m = 1$: Nun folgt $p + 1 \mid 24$. Es kommen also die Primzahlen $p = 7, 11, 23$ in Betracht. Die weitere Behandlung dieser Sonderfälle verschieben wir auf § 4.

$m=2$: Nun ist $p^4-1 \mid (p-1)2^6 3\,5$, daher $p^3<2^6 3\,5$, also sicher $p<12$. Die Primzahlen 7 und 11 scheiden aber wegen $7^4 \equiv 1\,(5^2)$ und $11^4 \equiv 1\,(61)$ aus.

$m=3$: Jetzt ist $p^8-1 \mid (p-1)2^7 3^3 7$, daher $p^7<2^7 3^3 7$ und dann $p<6$, was wegen $p \not\equiv 1\,(4)$ und $p>3$ nicht geht.

b) Nun sei $p=3$. Zunächst verschaffen wir uns eine bessere Abschätzung von $m$ als die unter Schritt 3 ermittelte:

$$3^{s2^m}-1 \mid 2^{2m+1}(2^{2m}-1)\,2m$$

liefert uns wegen $2m \leqq 2^m$ die Ungleichung

$$2^{s2^m} < 2^{2m+1+2m+m} \quad \text{und dann} \quad s\,2^m < 1+5m.$$

Damit folgt nun zunächst $m \leqq 4$. Wegen $3^4 \equiv 1\,(5)$ ist für $m \geqq 2$ notwendig $5 \mid 2^{2m}-1$. Dann ist aber $m=2$ oder $m=4$. Wir müssen daher nur die Werte $m=1, 2, 4$ betrachten.

$m=1$: Es gilt nun $3^{2s}-1 \mid 2^4 3$, also auch $3^{2s}-1 \mid 2^4$. Dann ist $s=1$ und daher $n=2$. Auch diesen Sonderfall behandeln wir in § 4.

$m=2$: Nun ist gefordert $3^{4s}-1 \mid 2^7 3\,5$. Diese Teilbarkeitsbeziehung ist nur für $s=1$ erfüllt. Wir bekommen daher einen weiteren Sonderfall mit $n=4$, $p=3$ und $|\mathfrak{G}^0| \mid 2^7 3\,5$. Die genaue Betrachtung dieses interessantesten Sonderfalles wird in § 3 erfolgen. Wir vermerken noch, daß in diesem Falle $\overline{\mathfrak{G}}$ eine Untergruppe der semilinearen homogenen Gruppe $\mathfrak{S}(2^4)^0$ ist.

$m=4$: Jetzt ist $s=1$, und wir erhalten $3^{16}-1 \mid 2^{12} 3\,5\,17$, was wegen $3^8 \equiv 1\,(41)$ sicher nicht richtig ist.

c) Zu behandeln bleibt noch der Fall $p \equiv 1\,(4)$. Unter Beachtung von

$$2^m \top \frac{p^{2^m}-1}{p-1}$$

bekommen wir $p^{2^m}-1 \mid (p-1)2^m(2^{2^m}-1)m$. Dabei ist $m \leqq 3$.

$m=1$: Nun ist $p+1 \mid 6$, also $p=5$. Auch diesen (letzten) Sonderfall betrachten wir in § 4.

$m=2$: Jetzt ist gefordert $p^4-1 \mid (p-1)2^3 3\,5$. Es ergibt sich $p^3<120$, was wegen $p \geqq 5$ ein Widerspruch ist.

$m=3$: Wir erhalten $p^8-1 \mid (p-1)2^3 3^3 7$ und dann $p^7<2^3 3^3 7$, was sicher nicht geht.

Die weitere Durchrechnung von Fall A und Fall B, bei der keine neuen Ausnahmefälle auftreten, unterdrücken wir.

## § 3. Der Ausnahmefall Grad $\mathfrak{G}=3^4$

Wir hatten in Schritt 8 ermittelt, daß für die Ausnahmegruppen vom Grad $3^4$ gilt $|\mathfrak{G}^0| = 2^5 |\overline{\mathfrak{G}}| \mid 2^7 \cdot 3 \cdot 5$ und $\overline{\mathfrak{G}} \leqq \mathfrak{S}(2^4)^0$. Also hat $\overline{\mathfrak{G}}$ einen zyklischen Normalteiler $\overline{\mathfrak{Z}}$, dessen Ordnung $2^4-1=15$ teilt. Wegen $3^4-1 \mid |\mathfrak{G}^0|$ und $3^4 \equiv 1\,(5)$ ist die Ordnung von $\overline{\mathfrak{Z}}$ sicher durch 5 teilbar. Angenommen, sie wäre auch durch 3 teilbar. Dann hätten die 2-Sylow-Komplemente von

$\mathfrak{G}^0$ die Ordnung 15 und wären zyklisch. Nun läßt sich aber ein Element $X$ der Ordnung 5 aus $GL(4, 3)$ über $GF(3^4)$ auf Diagonalgestalt bringen und hat lauter verschiedene Eigenwerte. Ein mit $X$ vertauschbares Element der Ordnung 3 ist dann ebenfalls diagonal über $GF(3^4)$, muß dann aber die Einheit sein, da $GF(3^4)$ keine primitiven dritten Einheitswurzeln enthält. Somit kann $|\overline{\mathfrak{Z}}|$ und dann auch $|\mathfrak{G}^0|$ nicht durch 3 teilbar sein. Es bleibt also die Abschätzung $|\mathfrak{G}^0| \mid 2^7 5$. Da $\mathfrak{G}^0$ sicher den Normalteiler $\mathfrak{N}$ der Ordnung $2^5$ enthält, ferner $|\mathfrak{G}^0|$ wegen $3^4 \equiv 1\,(5)$ durch 5 teilbar ist, erhalten wir als untere Schranke $2^5\,5 \mid |\mathfrak{G}^0|$.

Der Normalteiler $\mathfrak{N}$ von $\mathfrak{G}^0$ hat die folgenden Eigenschaften:

1. $|\mathfrak{N}'| = |\mathfrak{Z}(\mathfrak{N})| = 2$; denn nach [3], Hilfssatz I.3 liegen $\mathfrak{N}'$ und $\mathfrak{Z}(\mathfrak{N})$ in der Gruppe $\mathfrak{Z} = \{\pm E\}$.

2. $\mathfrak{N}/\mathfrak{N}'$ hat den Typ (2, 2, 2, 2); dies folgt aus [3], Hilfssatz I.2 mit $m = 2$ und $\mathfrak{N}' = \mathfrak{Z}(\mathfrak{N})$.

3. $|\mathfrak{N}| = 2^5$; ergibt sich sofort aus 1. und 2.

4. Zwischen $\mathfrak{N}$ und $\mathfrak{Z}(\mathfrak{N})$ liegt keine charakteristische Untergruppe von $\mathfrak{G}^0$; folgt aus [3], Hilfssatz I.2.

Sei nun $\Omega_1(\mathfrak{N})$ die von den Elementen der Ordnung 2 von $\mathfrak{N}$ erzeugte charakteristische Untergruppe von $\mathfrak{N}$. Nach 3. ist $\mathfrak{Z}(\mathfrak{N}) \leq \Omega_1(\mathfrak{N})$, daher wegen 4. dann $\Omega_1(\mathfrak{N}) = \mathfrak{Z}(\mathfrak{N})$ oder $\Omega_1(\mathfrak{N}) = \mathfrak{N}$. Im ersten Falle würde aber $\mathfrak{N}$ nur eine Untergruppe der Ordnung 2 enthalten, wäre daher eine verallgemeinerte Quaternionengruppe, was jedoch wegen 2. ausgeschlossen ist. Somit gilt $\Omega_1(\mathfrak{N}) = \mathfrak{N}$, und $\mathfrak{N}$ wird von Elementen der Ordnung 2 erzeugt.

Sei $A$ ein Element der Ordnung 4 von $\mathfrak{N}$; wegen $\mathfrak{N}' \neq \mathfrak{E}$ gibt es sicher ein solches. Dann ist $\{A\}$ wegen $\{A^2\} = \mathfrak{N}'$ invariant in $\mathfrak{N}$. Wäre jedes Element der Ordnung 2 von $\mathfrak{N}$ mit $A$ vertauschbar, so würde der Zentralisator $\mathfrak{C}(A)$ von $A$ die Gruppe $\Omega_1(\mathfrak{N}) = \mathfrak{N}$ enthalten. Dann wäre aber $A \in \mathfrak{Z}(\mathfrak{N})$, entgegen $|\mathfrak{Z}(\mathfrak{N})| = 2$. Somit gibt es ein Element $B$ der Ordnung 2, welches die Relation $BAB^{-1} = A^{-1}$ erfüllt. $\{A, B\}$ ist dann eine Diedergruppe der Ordnung 8.

In dem symplektischen Raum $\mathfrak{N}/\mathfrak{Z}(\mathfrak{N})$ (mit der durch die Kommutatorbildung nach [3], Hilfssatz II.3 gelieferten schiefen Bilinearform) betrachten wir nun den zu $\{A, B\}/\mathfrak{Z}(\mathfrak{N})$ „senkrechten" Raum. Diesem entspricht dann in $\mathfrak{N}$ ein Normalteiler $\{C, D\}$ der Ordnung 8, welcher mit $\{A, B\}$ elementweise vertauschbar ist. Da die schiefe Bilinearform nicht ausgeartet ist, gilt sicher $(C, D) \neq E$. Somit ist $\{C, D\}$ eine nichtabelsche Gruppe der Ordnung 8, also eine Diedergruppe $\mathfrak{D}$ der Ordnung 8 oder eine Quaternionengruppe $\mathfrak{Q}$. Als Ergebnis erhalten wir: $\mathfrak{N}$ ist das direkte Produkt $\mathfrak{Q} \dot{\times} \mathfrak{D}$ mit verschmolzenen Zentren von einer Diedergruppe $\mathfrak{D}$ der Ordnung 8 mit einer Quaternionengruppe $\mathfrak{Q}$ oder das direkte Produkt $\mathfrak{D} \dot{\times} \mathfrak{D}$ mit verschmolzenen Zentren von zwei Diedergruppen der Ordnung 8. Diese beiden Gruppen sind gewiß nicht isomorph, denn $\mathfrak{D} \dot{\times} \mathfrak{D}$ hat 19 Elemente der Ordnung 2 und 12 Elemente der Ordnung 4, während $\mathfrak{Q} \dot{\times} \mathfrak{D}$ 11 Elemente der Ordnung 2 und 20 Elemente der Ordnung 4 besitzt.

Unter den Automorphismen, welche bei Transformation mit Elementen von $\mathfrak{G}^0$ in $\mathfrak{N}/\mathfrak{Z}(\mathfrak{N})$ bewirkt werden und die Gruppe $\overline{\mathfrak{G}}$ bilden, werden die Nebenklassen von $\mathfrak{N}$ nach $\mathfrak{Z}(\mathfrak{N})$ vertauscht. Abgesehen von der Einheitsnebenklasse enthalten alle Nebenklassen je zwei Elemente von gleicher Ordnung. $\overline{\mathfrak{G}}$ kann sicher nur solche Nebenklassen ineinander überführen, welche aus Elementen gleicher Ordnung bestehen. Nun hat $\mathfrak{D} \dot{\times} \mathfrak{D}$ 9 Nebenklassen mit Elementen der Ordnung 2 und 6 Nebenklassen mit Elementen der Ordnung 4; $\mathfrak{Q} \dot{\times} \mathfrak{D}$ hat 5 Nebenklassen mit Elementen der Ordnung 2 und 10 Nebenklassen mit Elementen der Ordnung 4.

Unsere Gruppe $\overline{\mathfrak{G}}$ ist im vorliegenden Fall eine Untergruppe der Gruppe $\mathfrak{S}(2^4)^0$ von semilinearen homogenen Abbildungen über $GF(2^4)$ (s. S. 142). Wir wissen bereits, daß $5 \mid |\mathfrak{G}| \mid 20$. Eine Untergruppe $\overline{\mathfrak{G}}$ der Ordnung 20 von $\mathfrak{S}(2^4)^0$ ist bis auf die Bezeichnung der Ziffern eindeutig bestimmt und wird etwa erzeugt von den Permutationen

$$F = \begin{pmatrix} x \\ \zeta x \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad G = \begin{pmatrix} x \\ x^2 \end{pmatrix},$$

wobei $\zeta$ eine primitive 5-te Einheitswurzel aus $GF(2^4)$ ist. Die Ziffer 1 bleibt genau bei $\{G\}$ fest, liegt also in einem Transitivitätsgebiet der Länge 5 von $\overline{\mathfrak{G}}$. Die Ziffer $1+\zeta$ bleibt nur bei $FG^2$ und $E$ fest[2]), liefert daher ein Transitivitätsgebiet der Länge 10. Die Untergruppen $\overline{\mathfrak{G}}$ der Ordnung 10 und 5 von $\mathfrak{S}(2^2)^0$ unterscheiden sich nur durch die Bezeichnung der Ziffern von $\{F, G^2\}$ und $\{F\}$. Unter diesen zerfällt das zweite Transitivitätsgebiet in zwei Gebiete der Länge 5.

Nun ist es aber offenbar nicht möglich, die Einteilung der Nebenklassen von $\mathfrak{D} \dot{\times} \mathfrak{D}$ nach $\mathfrak{Z}(\mathfrak{N})$ in zwei Abteilungen von 9 bzw. 6 Nebenklassen den Transitivitätsgebieten von $\overline{\mathfrak{G}}$ mit den Längen 10, 5 oder 5, 5, 5 anzupassen. Somit kann $\mathfrak{N}$ nicht isomorph zu $\mathfrak{D} \dot{\times} \mathfrak{D}$ sein. Für $\mathfrak{Q} \dot{\times} \mathfrak{D}$ paßt jedoch die Einteilung der Nebenklassen von $\mathfrak{Z}(\mathfrak{N})$ gemäß der Ordnung der darinliegenden Elemente mit den Längen der Transitivitätsgebiete von $\overline{\mathfrak{G}}$ zusammen. Damit sehen wir, daß $\mathfrak{N}$ durch $\mathfrak{Q} \dot{\times} \mathfrak{D}$ der Struktur nach eindeutig bestimmt ist.

Nach [3], Hilfssatz III.4 hat $\mathfrak{N}$ über $GF(3)$ höchstens eine absolut irreduzible Darstellung vom Grad 4. Aus $\mathfrak{N} = \mathfrak{Q} \dot{\times} \mathfrak{D}$ folgt leicht, daß eine absolut irreduzible Darstellung von $\mathfrak{N}$ geliefert wird durch

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

[2]) durch einfache Rechnung unter Verwendung der über $GF(2)$ irreduziblen Gleichung $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = 0$ für $\zeta$.

Zunächst zeigen wir, daß sich die gefundene Gruppe $\mathfrak{N}$ wirklich zu einer auf den von (0, 0, 0, 0) verschiedenen Vektoren transitiven Gruppe $\mathfrak{G}^0$ der Ordnung $2^7 5$ ergänzen läßt. Wir nehmen zu $\mathfrak{N}$ die beiden Matrizen

$$F = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

hinzu (in anderer Gestalt bei Bucht [1], S. 71—72, 78). Die Relationen

$$FAF^{-1} = CB,\ FBF^{-1} = -AB,\ FCF^{-1} = ABD,\ FDF^{-1} = -C,$$
$$GAG^{-1} = ABC,\ GBG^{-1} = B,\ GCG^{-1} = CDB,\ GDG^{-1} = DB,$$
$$F^5 = E,\ G^4 = -B,\ GFG^{-1} = DCBF^2$$

zeigen, daß wirklich eine Gruppe $\mathfrak{G}^0$ mit $|\mathfrak{G}^0/\mathfrak{N}| = 20$ und der gewünschten Struktur von $\mathfrak{G}^0/\mathfrak{N}$ entsteht.

Wir haben nun zu beweisen, daß diese Gruppe $\mathfrak{G}^0$ auf den von (0, 0, 0, 0) verschiedenen Vektoren transitiv ist. Wir zeigen, daß sogar die Untergruppe $\mathfrak{G}^0_{3^4,3} = \{A, B, C, D, F\}$ transitiv ist.

Ein beliebiges Element der Ordnung 5 aus $\mathfrak{G}^0_{3^4,3}$ läßt keinen von (0, 0, 0, 0) verschiedenen Vektor fest; denn die Eigenwerte einer Matrix der Ordnung 5 sind über $GF(3)$ konjugierte primitive 5-te Einheitswurzeln, sind also alle von 1 verschieden. Sei $\eta$ ein beliebiger, von (0, 0, 0, 0) verschiedener Vektor, $\mathfrak{G}^{0;\eta}_{3^4,3}$ diejenige Untergruppe von $\mathfrak{G}^0_{3^4,3}$, welche $\eta$ fest läßt. In $\mathfrak{G}^{0;\eta}_{3^4,3}$ liegt dann keine 5-Sylow-Gruppe von $\mathfrak{G}^0_{3^4,3}$. Daher gilt $\mathfrak{G}^{0;\eta}_{3^4,3} \leq \mathfrak{N}$. Spezialisieren wir nun zu $\eta = (1, 0, 0, 0)$, so läßt kein Element außer $E$ der von $A, C, D$ erzeugten Untergruppe der Ordnung $2^4$ von $\mathfrak{N}$ den Vektor $\eta$ fest. Ist $\mathfrak{N}^\eta$ die Fixuntergruppe von $\eta$ in $\mathfrak{N}$, so folgt $|\mathfrak{N}:\mathfrak{N}^\eta| \geq 2^4$ und daher $2^4 5 \,|\, |\mathfrak{G}^0_{3^4,3} : \mathfrak{G}^{0;\eta}_{3^4,3}|$, womit gezeigt ist, daß $\eta$ unter $\mathfrak{G}^0_{3^4,3}$ in alle von (0, 0, 0, 0) verschiedenen Vektoren übergeht. Damit haben wir die folgenden zweifach transitiven, auflösbaren Permutationsgruppen vom Grad $3^4$ erhalten:

$$\mathfrak{G}^0_{3^4,1} = \{A, B, C, D, F, G\}, \quad \mathfrak{G}^0_{3^4,2} = \{A, B, C, D, F, G^2\}$$

und

$$\mathfrak{G}^0_{3^4,3} = \{A, B, C, D, F\}.$$

Nachzuweisen bleibt noch, daß dies, abgesehen von der Bezeichnung der Ziffern, alle Ausnahmetypen vom Grad $3^4$ sind. Wir beweisen zunächst die Eindeutigkeit der Gruppe $\mathfrak{G}^0_{3^4,3}$, und zwar in folgender Formulierung:

Sei $\mathfrak{R}$ eine Untergruppe von $GL(4, 3)$, welche $\mathfrak{N}$ als Normalteiler besitzt. $\mathfrak{R}/\mathfrak{N}$ habe die Ordnung 5. Dann ist $\mathfrak{R}$ eindeutig bestimmt.

Wegen der Teilerfremdheit von $|\mathfrak{N}| = 2^5$ und $|\mathfrak{R}/\mathfrak{N}| = 5$ besitzt $\mathfrak{N}$ in $\mathfrak{R}$ eine Vertretergruppe $\mathfrak{V}$ (Zassenhaus [6], S. 125). Da wegen der absoluten

Irreduzibilität von $\mathfrak{N}$ der Zentralisator von $\mathfrak{N}$ in $GL(4, 3)$ nach dem Schurschen Lemma nur die Elemente $\pm E$ enthält, kann $\mathfrak{V}$ auf $\mathfrak{N}$ nicht den identischen Automorphismus bewirken. Also ist $\mathfrak{K}$ im Holomorph $H(\mathfrak{N}) = \mathfrak{N}A(\mathfrak{N})$ von $\mathfrak{N}$ enthalten. Wegen $|A(\mathfrak{N})||2^4|C(4, 2)| = 2^8 3^2 5$ sind alle Untergruppen $\mathfrak{V}$ der Ordnung 5 von $A(\mathfrak{N})$ als 5-Sylow-Gruppen von $A(\mathfrak{N})$ unter $A(\mathfrak{N})$ konjugiert. Daher sind auch alle Gruppen $\mathfrak{K}$ unter $H(\mathfrak{N})$ konjugiert, und $\mathfrak{K}$ ist bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt. Nun ist noch zu zeigen, daß die abstrakte Gruppe $\mathfrak{K}$ der Ordnung $2^5 5$ nur eine irreduzible Darstellung vom Grad 4 über $GF(3)$ besitzt. Von $\mathfrak{N}$ wissen wir dies bereits. Ein Element $F$ von $\mathfrak{K}$ der Ordnung 5 ist durch den von ihm auf $\mathfrak{N}$ bewirkten Automorphismus mod $\mathfrak{C}(\mathfrak{N}) = \{-E\}$ bestimmt. Durch $F^5 = E$ wird aber dann das Vorzeichen von $F$ festgelegt. Damit ist bewiesen, daß unsere Gruppe $\mathfrak{K}$ der Ordnung $2^5 5$ bis auf Äquivalenz eindeutig bestimmt ist.

Nun betrachten wir die Gruppen $\mathfrak{G}^0$ der Ordnung $2^6 5$. Angenommen, es gäbe zwei verschiedene Gruppen $\mathfrak{H}_1$ und $\mathfrak{H}_2$ dieser Art, welche auf den von $(0, 0, 0, 0)$ verschiedenen Vektoren transitiv sind und sich nicht nur durch die Bezeichnung der Ziffern unterscheiden. Beide enthalten dann einen Normalteiler der Ordnung $2^5 5$, welcher zu der eben bestimmten Gruppe $\mathfrak{G}^0_{3^4,3}$ isomorph ist. Durch Übergang zu äquivalenten Gruppen können wir erreichen, daß $\mathfrak{H}_1$ und $\mathfrak{H}_2$ den Normalteiler $\mathfrak{G}^0_{3^4,3}$ gemeinsam haben. Die Gruppe $\mathfrak{H}_1 \cup \mathfrak{H}_2/\mathfrak{G}^0_{3^4,3}$ wird dann von zwei Elementen der Ordnung 2 erzeugt, ist daher bekanntlich eine Diedergruppe. $\mathfrak{H}_1 \cup \mathfrak{H}_2$ ist dann eine zweifach transitive, auflösbare Permutationsgruppe. Dies geht jedoch nicht, da nach S. 142 $\mathfrak{H}_1 \cup \mathfrak{H}_2/\mathfrak{G}^0_{3^4,3}$ eine zyklische Gruppe sein muß. Damit haben wir die Annahme, daß es zwei verschiedene Gruppen $\mathfrak{G}^0$ der Ordnung $2^6 5$ gäbe, zum Widerspruch geführt. Wiederholen wir diese Betrachtung für die Gruppen der Ordnung $2^7 5$, so erhalten wir auch die Eindeutigkeit der Gruppe $\mathfrak{G}^0_{3^4,1}$ der Ordnung $2^7 5$, abgesehen von der Bezeichnung der Ziffern.

## § 4. Die übrigen Ausnahmefälle

Für alle noch zu betrachtenden Ausnahmefälle liegt Fall A mit $q = 2$ und $n = 2$ vor. Dann ist $|\mathfrak{N}/\mathfrak{Z}(\mathfrak{N})| = 4$ und $|\mathfrak{Z}(\mathfrak{N})| | p - 1$ (s. S. 142). Aus $\mathfrak{Z}(\mathfrak{N}) \leqq \mathfrak{U} < \mathfrak{N}$ und $\mathfrak{U} \lhd \mathfrak{G}^0$ folgt $\mathfrak{Z}(\mathfrak{N}) = \mathfrak{U}$ ([3], Hilfssatz I. 2).

$p^n = 3^2$. Aus der Tatsache, daß nun $|\mathfrak{N}| = 2^3$ gilt und zwischen $\mathfrak{Z}(\mathfrak{N})$ und $\mathfrak{N}$ keine charakteristische Untergruppe von $\mathfrak{N}$ liegt, entnehmen wir, daß $\mathfrak{N}$ keine Diedergruppe der Ordnung 8 sein kann, also eine Quaternionengruppe $\mathfrak{Q}$ ist. Die volle lineare Gruppe $GL(2, 3)$ ist auflösbar, so daß $\mathfrak{G}^0$ eine beliebige, $\mathfrak{Q}$ umfassende Untergruppe von $GL(2, 3)$ sein kann; denn bereits $\mathfrak{Q}$ ist transitiv auf den von 0 verschiedenen Vektoren. Es kommen zunächst die folgenden Typen in Betracht:

1. $\mathfrak{G}^0_{3^2,1} = GL(2, 3)$.

2. $|\mathfrak{G}^0_{3^2,2}| = 3|\mathfrak{Q}|$. Dieser Typ ist eindeutig bestimmt als einziger Normalteiler von $GL(2, 3)$ vom Index 2.

3. $|\mathfrak{G}^0| = 2|\mathfrak{Q}|$. Dann ist $\mathfrak{G}^0$ als 2-Sylow-Gruppe von $GL(2, 3)$ bis auf Äquivalenz eindeutig bestimmt.

4. $\mathfrak{G}^0 = \mathfrak{Q}$. Auch dieser Typ ist bis auf Äquivalenz bestimmt, da $\mathfrak{Q}$ über $GF(3)$ nur eine treue Darstellung vom Grad 2 hat.

Die semilinearen homogenen Abbildungen aus $\mathfrak{S}(3^2)$ liefern uns eine Untergruppe von $GL(2, 3)$ der Ordnung $(3^2-1)2 = 2^4$. Diese muß also mit Typ 3. übereinstimmen. Daher bestehen die Gruppen vom Typ 3. und 4. bei geeigneter Bezeichnung der Ziffern aus semilinearen Abbildungen. Als echte Ausnahmefälle bleiben die Typen 1. und 2. Nehmen wir als erzeugende Matrizen von $\mathfrak{Q}$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

so können wir mit Hilfe der weiteren Matrizen

$$C = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad D = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

mit den Relationen

$$CAC^{-1} = B,\ CBC^{-1} = AB,\ DAD^{-1} = B,\ DBD^{-1} = A,\ C^3 = D^2 = E$$

die Ausnahmetypen angeben in der Gestalt

$$\mathfrak{G}^0_{3^2,1} = \{A, B, C, D\} \quad \text{und} \quad \mathfrak{G}^0_{3^2,2} = \{A, B, C\}.$$

$p^n = 5^2$. Ist $|\mathfrak{N}| = 8$, so ist $\mathfrak{N}$ wie eben eine Quaternionengruppe $\mathfrak{Q}$. Ist aber $|\mathfrak{N}| = 2^4$, so haben wir $|\mathfrak{Z}(\mathfrak{N})| = 4$. Wir wissen bereits, daß $|\mathfrak{N}'| = 2$ ([3], Hilfssatz I. 3). Sei $\mathfrak{O}_1(\mathfrak{N}) = \{N^2 | N \in \mathfrak{N}\}$. Da $\mathfrak{N}/\mathfrak{Z}(\mathfrak{N})$ den Typ (2, 2) hat und die Elemente von $\mathfrak{N}$ höchstens die Ordnung 4 haben ([3], Hilfssatz I. 5), ist $\mathfrak{O}_1(\mathfrak{N}) \leq \mathfrak{Z}(\mathfrak{N})$ und $|\mathfrak{O}_1(\mathfrak{N})| = 2$, also $\mathfrak{N}' = \mathfrak{O}_1(\mathfrak{N}) = \Phi(\mathfrak{N})$. Somit wird $\mathfrak{N}$ von drei, und nicht weniger Elementen erzeugt, von denen eines aus $\mathfrak{Z}(\mathfrak{N})$ entnommen werden kann. Die beiden anderen Elemente erzeugen dann eine nichtabelsche Untergruppe $\mathfrak{U}$ der Ordnung 8 von $\mathfrak{N}$. Ist $\mathfrak{U} = \{A, B\}$ eine Diedergruppe mit $A^4 = B^2 = E$ und $BAB^{-1} = A^{-1}$ und $Z$ ein erzeugendes Element von $\mathfrak{Z}(\mathfrak{N})$, so ist $\{A, BZ\}$ wegen $(BZ)^2 = -E$ eine Quaternionengruppe. Beachten wir noch, daß für $|\mathfrak{Z}(\mathfrak{N})| = 4$ notwendig $\mathfrak{Z}(\mathfrak{N}) = \{2E\}$ ist, so haben wir $\mathfrak{N} = \mathfrak{Q}$ oder $\mathfrak{N} = \{\mathfrak{Q}, 2E\}$.

Nun kommen verschiedene Fälle in Betracht:

1. $\mathfrak{N} = \{\mathfrak{Q}, 2E\}$ und $|\mathfrak{G}^0/\mathfrak{N}| = 6$.
2. $\mathfrak{N} = \{\mathfrak{Q}, 2E\}$ und $|\mathfrak{G}^0/\mathfrak{N}| = 3$.
3. $\mathfrak{N} = \mathfrak{Q}$ und $|\mathfrak{G}^0/\mathfrak{N}| = 3$.
4. $\mathfrak{N} = \mathfrak{Q}$ und $|\mathfrak{G}^0/\mathfrak{N}| = 6$.

Andere Fälle sind wegen der Bedingung $5^2 - 1 \,||\, \mathfrak{G}^0 \,||\, 2^5 3$ schon durch Betrachtung der Ordnung ausgeschlossen.

Da die treue Darstellung von $\mathfrak{Q}$ über $GF(5)$ bis auf Äquivalenz eindeutig bestimmt ist, können wir annehmen, daß $\mathfrak{Q}$ von den folgenden Matrizen erzeugt wird:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Wir betrachten außerdem noch die beiden Matrizen

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$$

mit den Relationen

$$CAC^{-1} = -AB,\ CBC^{-1} = A,\ DAD^{-1} = B,\ DBD^{-1} = A,\ C^3 = E,\ D^2 = 2E.$$

Eine Gruppe vom Typ 2. erhalten wir nun in $\mathfrak{G}^0_{5^2,2} = \{A, B, C, 2E\}$. Dies ist aber die einzige Gruppe vom Typ 2.; denn zunächst ist $\mathfrak{G}^0_{5^2,2}$ als Erweiterung von $\mathfrak{N}$ mit einer zyklischen Gruppe der Ordnung 3 bis auf Isomorphie bestimmt (gleicher Schluß wie in § 3 für $\mathfrak{G}^0_{3^4,3}$). Da aber die Darstellung von $\mathfrak{N}$ bis auf Äquivalenz eindeutig festliegt, ist dann auch jedes Element der Ordnung 3 von $\mathfrak{G}^0_{5^2,2}$ durch seinen Automorphismus auf der absolut irreduziblen Gruppe $\mathfrak{N}$ eindeutig bestimmt. Wie auf S. 146 sehen wir dann, daß es auch nur eine Gruppe vom Typ 1. gibt, nämlich $\mathfrak{G}^0_{5^2,1} = \{A, B, C, D, 2E\}$.

In $\mathfrak{G}^0_{5^2,3} = \{A, B, C\}$ erhalten wir eine Gruppe vom Typ 3. Die eben durchgeführten Betrachtungen zeigen, daß dies bis auf Äquivalenz die einzige Gruppe dieser Art ist. $\mathfrak{G}^0_{5^2,3}$ ist „scharf transitiv", da keine ihrer Matrizen außer $E$ einen von $(0, 0)$ verschiedenen Vektor fest läßt. Sie ist also multiplikative Gruppe eines Fastkörpers und findet sich unter den von ZASSENHAUS angegebenen Gruppen (ZASSENHAUS [5], S. 216).

Schließlich weisen wir noch nach, daß keine Gruppe vom Typ 4. existiert. $\mathfrak{P} = \{A, B, D, 2E\}$ hat die Ordnung $2^5$, ist also eine 2-Sylow-Gruppe von $GL(2, 5)$. Ein Element $T$ von $\mathfrak{P}$, welches nicht in $\{A, B, 2E\}$ liegt, hat die Gestalt $T = 2^a DQ$ mit $Q \in \mathfrak{Q} = \{A, B\}$. Dann ist $T^2 = 2^{2a} Q^{D+E} D^2$. Wäre $T^2 \in \mathfrak{Q}$, so wäre wegen $2^{2a} Q^{D+E} \in \mathfrak{Q}$ auch $D^2 = 2E \in \mathfrak{Q}$, was aber nicht stimmt. Also gibt es in $\mathfrak{P}$ kein Element $T$, welches auf $\mathfrak{Q}/\mathfrak{Z}(\mathfrak{Q})$ einen Automorphismus der Ordnung 2 bewirkt und dessen zweite Potenz $T^2$ in $\mathfrak{Q}$ liegt. Aber gerade dies müßte bei einer Gruppe vom Typ 4. der Fall sein, da $\mathfrak{N}$ der Zentralisator von $\mathfrak{N}/\mathfrak{Z}(\mathfrak{N})$ ist.

$p^n = 7^2$. Wieder ist $\mathfrak{N}$ eine Quaternionengruppe und kann durch die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

angegeben werden. Enthält $\mathfrak{Z}(\mathfrak{G}^0)$ Elemente der Ordnung 3, so haben diese die Gestalt $2^a E$. Nun sind zwei Fälle zu unterscheiden, je nachdem $|\mathfrak{Z}(\mathfrak{G}^0)| = 2$ oder $|\mathfrak{Z}(\mathfrak{G}^0)| = 6$ ist. Im ersten Fall muß $\mathfrak{G}^0/\mathfrak{N}$ wegen der Einschränkung $7^2 - 1 \,||\, |\mathfrak{G}^0| \,|\, 2^4 3^2$ die Ordnung 6 haben.

Die Darstellung von $\mathfrak{Q}$ ist wieder wesentlich eindeutig bestimmt. Ein Element der Ordnung 3 von $\mathfrak{G}^0$ ist dann durch seinen Automorphismus auf $\mathfrak{Q}/\mathfrak{Z}(\mathfrak{Q})$ bis auf Faktoren aus der 3-Sylow-Gruppe von $\mathfrak{C}(\mathfrak{Q})$ bestimmt, also bis auf Faktoren $2^a E$. Da aber im Falle $|\mathfrak{Z}(\mathfrak{G}^0)| = 2$ die Gruppe $\mathfrak{G}^0$ scharf transitiv ist, hat kein von $E$ verschiedenes Element von $\mathfrak{G}^0$ den Eigenwert $+1$. Ist nun $X$ ein Element der Ordnung 3 von $\mathfrak{G}^0$, welches auf $\mathfrak{Q}/\mathfrak{Z}(\mathfrak{Q})$ einen vorgegebenen nichtidentischen Automorphismus bewirkt, so hat $X$ zwei verschiedene, primitive dritte Einheitswurzeln als Eigenwerte, also die Zahlen 2 und 4. Die Ersetzung von $X$ durch $2X$ oder $4X$ führt dann aber stets zu Matrizen mit dem Eigenwert $+1$, ist daher nicht erlaubt. Damit haben wir genau eine Gruppe $\mathfrak{G}^0_{7^2,2}$ mit $|\mathfrak{Z}(\mathfrak{G}^0_{7^2,2})| = 2$ erhalten, die etwa durch $\mathfrak{G}^0_{7^2,2} = \{A, B, C, D\}$ mit

$$C = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad D = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}$$

gegeben wird. Folgende Relationen beschreiben den Erweiterungstypus:

$$CAC^{-1} = -AB,\ CBC^{-1} = A,\ DAD^{-1} = -B,\ DBD^{-1} = -A,$$
$$C^3 = E,\ D^2 = -E.$$

Die Gruppe $\mathfrak{G}^0_{7^2,2}$ befindet sich wieder unter den in [5], S. 216 angegebenen Typen.

Im Falle $|\mathfrak{Z}(\mathfrak{G}^0)| = 6$ muß die Ordnung von $\mathfrak{G}^0/\mathfrak{Z}(\mathfrak{G}^0)\mathfrak{Q}$ durch 2 teilbar sein, was aus $7^2 - 1 \mid |\mathfrak{G}^0|$ folgt. Da eine Gruppe der Ordnung 2 auf dem Modul $\mathfrak{Q}/\mathfrak{Z}(\mathfrak{Q})$ über $GF(2)$ nicht irreduzibel sein kann, $\mathfrak{Q}/\mathfrak{Z}(\mathfrak{Q})$ aber ein Hauptfaktor von $\mathfrak{G}^0$ ist, ist jetzt $|\mathfrak{G}^0/\mathfrak{Z}(\mathfrak{G}^0)\mathfrak{Q}| = 6$. Dieser Typ unterscheidet sich von $\mathfrak{G}^0_{7^2,2}$ nur durch das größere Zentrum; er ist bis auf Äquivalenz bestimmt durch $\mathfrak{G}^0_{7^2,1} = \{A, B, C, D, 2E\}$.

$p^n = 11^2$. Nun ist $\mathfrak{N}$ ebenfalls eine Quaternionengruppe. Wir sehen sofort, daß mit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$$

durch $\mathfrak{G}^0_{11^2,2} = \{A, B, C, 4E\}$ und $\mathfrak{G}^0_{11^2,1} = \{A, B, C, D, 4E\}$ zwei Gruppen der Ordnungen $2^3 3\,5$ und $2^4 3\,5$ geliefert werden. Zwischen den angegebenen Matrizen bestehen die Gleichungen

$$CAC^{-1} = -AB,\ CBC^{-1} = A,\ DAD^{-1} = -B,\ DBD^{-1} = A,$$
$$C^3 = E,\ D^2 = -2AB.$$

Die schon vertrauten Schlußweisen zeigen schnell, daß dies auch alle Gruppen $\mathfrak{G}^0$ mit $p^n = 11^2$ sind.

$p^n = 23^2$. Die auf S. 141 ermittelte Abschätzung $|\mathfrak{G}^0| \mid 2^4 3\,11$ fällt nun mit der unteren Schranke $23^2 - 1$ zusammen, so daß die Ordnung von $\mathfrak{G}^0$ fest

liegt. Wir sehen leicht, daß $\mathfrak{G}^0$ durch $\mathfrak{G}^0_{23^2} = \{A, B, C, D, 2E\}$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 6 & -3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ -5 & -2 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 4 & -6 \end{pmatrix}$$

wesentlich eindeutig bestimmt ist. Zwischen den Matrizen $A, B, C, D$ bestehen nun die Beziehungen

$$CAC^{-1} = -AB, \; CBC^{-1} = A, \; DAD^{-1} = -B, \; DBD^{-1} = A,$$
$$C^3 = E, \; D^2 = -AB.$$

Damit haben wir alle möglichen Ausnahmetypen angegeben.

## Literatur

[1] BUCHT, G.: Die umfassendsten primitiven metazyklischen Kongruenzgruppen mit drei oder vier Variablen. Arkiv for Math., Astr., Fysik **11** (1917), 92 S. — [2] HUPPERT, B.: Primitive, auflösbare Permutationsgruppen. Archiv d. Math. **6**, 303—310 (1955). — [3] HUPPERT, B.: Lineare, auflösbare Gruppen. Math. Z. **67**, 479—518 (1957). — [4] MANNING, W. A.: Primitive groups. Stanford University Publ. 1921. — [5] ZASSENHAUS, H.: Über endliche Fastkörper. Abh. math. Seminar Hamburg **11**, 187—220 (1936). — [6] ZASSENHAUS, H.: Lehrbuch der Gruppentheorie I. 1937.

*Mathematisches Institut der Universität Tübingen*

*(Eingegangen am 19. Februar 1957)*

PETERSEN, G. M.
Math. Zeitschr. Bd. 68, S. 151—152 (1957)

# Sequences of Iterations

By
G. M. PETERSEN

The iteration of a matrix $B=(b_{mn})$ with a matrix $A=(a_{mn})$ is defined by

$$t_k=\sum_{m=1}^{\infty} b_{km}\tau_m \quad \text{where} \quad \tau_m=\sum_{n=1}^{\infty} a_{mn}s_n.$$

In short the iteration of $B$ with $A$, or $B\cdot A$, consists of applying the matrix $(b_{mn})$ to the sequence $\{\tau_m\}$ of $A$ transforms of $\{s_n\}$. Different methods have been studied by AGNEW, see [1] where an extensive bibliography is given.

A method $B=(b_{mn})$ is $b$-stronger than $A=(a_{mn})$ if every bounded $A$ summable sequence is also $B$ summable. If each method is $b$-stronger than the other, they are $b$-equivalent. It has been pointed out by the author [4] that the process of iteration is not well defined for unbounded sequences.

The norm of a matrix, $h(A)$, has been defined by BRUDNO, [2],

$$h(A)=\sup_m \sum_n |a_{mn}|.$$

Suppose we have a sequence of matrices $\{A_k\}$ and form the iteration of $A_2$ with $A_1$, then $A_3$ with the result and so on. We wish to prove

*Theorem 1.* Let $\{A_k\}$, $A_k=(a^k_{mn})$, be a sequence of regular matrices. If $\prod_{k=1}^{\infty} h(A_k)$ is bounded, then there is a matrix $b$-stronger than $A_2\cdot A_1$, $A_3\cdot A_2\cdot A_1$, $\ldots$, $A_n\ldots A_1$, $\ldots$.

Proof. We can construct matrices $B_k=(b^k_{mn})$ so that $b^k_{mn}=0$, $n\leqq\lambda_k(m)$ or $n\geqq\mu_k(m)$ that are $b$-equivalent to $(a^k_{mn})$, see [3]. We shall also assume that $\sum b^k_{mn}=1$ for every $m$ and every $k$, as it is clear that for every matrix, there is a matrix $b$-equivalent to it with this property. The sequence of $B_k$ and $A_k$ transforms for any bounded sequence differ by a convergent sequence only, so that a sequence of iterations of $B_k$ matrices is $b$-equivalent to the iteration of the corresponding sequence of $A_k$ matrices. We now denote the successive matrices $B_1$, $B_2\cdot B_1$, $\ldots$, $B_n\ldots B_1$, $\ldots$ by $C_1=(c^1_{mn})$, $C_2=(c^2_{mn})$, $\ldots$, $C_q=(c^q_{mn})$, $\ldots$.

Let

$$t^k_m=\sum c^k_{mn}s_n \quad \text{and define} \quad c^{p,k}_{mn} \quad \text{for} \quad p>k>0$$

by

$$t^p_m=\sum c^{p,k}_{mn}t^k_n \quad \text{and} \quad c^{p,0}_{mn}=c^p_{mn}.$$

Since $(c^{p,k}_{mn})$ is obtained by $B_p\cdot B_{p-1}\ldots B_{k+1}$ and $\prod h(B_k)\leqq M$,

$$\sum |c^{p,k}_{mn}|\leqq M$$

and $\sum b^k_{mn}=1$ means that $\sum c^{p,k}_{mn}=1$ for all $m$.

Consider the iteration $B_{k+2} \cdot B_{k+1}$, since $\lambda_{k+2}(m)$ is a strictly increasing function of $m$, it is clear that the index of the first non zero element of the $m$-th row of $B_{k+2} \cdot B_{k+1}$ will be the index of the first non zero element of $t^{k+2}_{\lambda_{k+1}(m)}$. But $\lambda_{k+1}(m)$ is a strictly increasing function of $m$ so that there must exist a strictly increasing function $\nu^{k+2,k}(m)$ such that $c^{k+2,k}_{m\,n} = 0$, $m \leqq \nu^{k+2,k}(m)$. Finally it is clear that there exists a strictly increasing function $\nu^{p,k}(m)$ such that $c^{p,k}_{m\,n} = 0$, $m \leqq \nu^{p,k}(m)$. We now choose a sequence $\{m_r\}$ so that

$$\operatorname*{Min}_{k=0,1,\ldots,r-1} \left[\nu^{r+1,k}(m_{r+1}) - \nu^{r,k}(m_r)\right] \geqq 1 .$$

Then for fixed $k$,

$$\lim_{r\to\infty} \sum c^{r,k}_{m_r n} = 1$$

$$\sum \left| c^{r,k}_{m_r n} \right| \leqq M$$

and $\lim\limits_{r\to\infty} c^{r,k}_{m_r n} = 0$.

Hence

$$\tau_r = \sum c^{r,k}_{m_r n}\, t^k_n$$

is a regular transformation and if $\{t^k_n\}$ converges for some $k$, $\{\tau_r\}$ converges. This proves our theorem.

If there were a sequence $\{s'_n\}$ not summable by any of the iterations, we could by omitting certain of the sequence of iterations choose our sequence $\{m_r\}$ so that $\{s'_n\}$ would be summed to the value determined by a collection point of the infinite bounded set $\left\{\lim\limits_{m\to\infty} \sup \sum c^k_{m\,n} s'_n\right\}$.

## References

[1] AGNEW, R. P.: Inclusion relations among methods of summability compounded from given matrix methods. Ark. Mat. **2**, 361—374 (1952). — [2] BRUDNO, A.: Summation of bounded sequences by matrices (in Russian). Mat. Sbornik, N. S. **16**, 191—247 (1945). — [3] GOFFMAN, C., and G. M. PETERSEN: Submethods of regular matrix summability methods. Canad. J. Math. **8**, 40—46 (1956). [4] PETERSEN, G. M.: Almost convergence and two matrix limitation methods. Math. Z. **66**, 225—227 (1956). — [5] PETERSEN, G. M.: The iteration of regular matrix methods of summation. Math. scand. **4**, 276—280 (1956). — [6] PETERSEN, G. M.: The norm of iterations of regular matrices. Proc. Cambridge Phil. Soc. **53**, 286—289 (1957).

*University College of Swansea, Great Britain*

*(Eingegangen am 28. Februar 1957)*

Thoma, E.
Math. Zeitschr. Bd. 68, S. 153—188 (1957)

# Zur Reduktionstheorie in allgemeinen Hilbert-Räumen*)

Von

Elmar Thoma

## Einleitung

Hat man in einem endlich-dimensionalen Hilbert-Raum $\mathfrak{H}$ endlich viele paarweise orthogonale Projektionen $E_\nu$, $\nu = 1, \ldots, r$, vorgegeben, deren Summe die identische Abbildung ist, so kann man $\mathfrak{H}$ als direkte Summe der Unterräume $\mathfrak{H}_\nu$, auf welche die $E_\nu$ projizieren, darstellen. Ist $A$ eine lineare Transformation in $\mathfrak{H}$, die mit sämtlichen $E_\nu$ vertauschbar ist, dann ist die Verengung $A_\nu$ von $A$ auf $\mathfrak{H}_\nu$ eine lineare Transformation in $\mathfrak{H}_\nu$. $A$ bestimmt die $A_\nu$ eindeutig und wird umgekehrt durch die $A_\nu$ eindeutig bestimmt.

In allgemeinen Hilbert-Räumen von beliebiger (auch überabzählbarer) Dimension sind die Dinge wegen des Auftretens von „Streckenspektren" nicht mehr so einfach. Eine erfolgreiche Behandlung des allgemeinen Falles ist sicher nur möglich, wenn man den Begriff der direkten Summe durch den allgemeineren Begriff des direkten Integrals (vgl. [*10*] und [*3*][1])) ersetzt. Wir werden das direkte Integral in einer für unsere Zwecke bequemen Weise im 5. Abschnitt einführen.

Wir gehen im allgemeinen Fall, wie im endlichen Fall, von einem Hilbert-Raum $\mathfrak{H}$ und einer geeigneten Menge $\mathfrak{M}$ von Projektionen in $\mathfrak{H}$ aus und fragen dann, ob sich $\mathfrak{H}$ „nach dieser Menge $\mathfrak{M}$ in ein direktes Integral zerlegen läßt". Die Mengen von Projektionen, die für uns in Betracht kommen, nennen wir ausgezeichnete Mengen [Definition s. (2)]. Im 1. und 2. Abschnitt betrachten wir die grundlegenden Eigenschaften von ausgezeichneten Mengen. Man kann die ausgezeichneten Mengen als vollständige Boolesche Verbände, genauer sogar als ein direktes Produkt von Maßverbänden, betrachten. Im 3. Abschnitt wird der zu dem Booleschen Verband einer ausgezeichneten Menge $\mathfrak{M}$ (nach [*11*]) isomorphe Mengenkörper $\mathfrak{K}_0$ konstruiert. In der größten Menge $X_{\mathfrak{M}}$ von $\mathfrak{K}_0$ wird die von $\mathfrak{K}_0$ erzeugte Topologie eingeführt. Im 4. Abschnitt wird die isomorphe Abbildung von $\mathfrak{K}_0$ auf $\mathfrak{M}$ zu einer $\sigma$-Homomorphie von $\mathfrak{K}$ auf $\mathfrak{M}$ erweitert. $\mathfrak{K}$ ist dabei der kleinste von $\mathfrak{K}_0$ und der Menge $\mathfrak{n}$ aller mageren Mengen von $X_{\mathfrak{M}}$ erzeugte $\sigma$-Körper. Diese Abbildung von $\mathfrak{K}$ auf $\mathfrak{M}$ liefert ein Spektralmaß $E/\mathfrak{K}$ mit dem Wertebereich $\mathfrak{M}$ (Satz 1).

Den Begriff des direkten Integrals $\mathfrak{S} = \int \mathfrak{H}_x d\mu$ mit dem Maß $\mu/\mathfrak{K}'$ und das zu $\mathfrak{S} = \int \mathfrak{H}_x d\mu$ gehörige Spektralmaß $E/\mathfrak{K}'$ führen wir im 5. Abschnitt ein;

*) Von der Naturwissenschaftlichen Fakultät der Universität München als Habilitationsschrift angenommen.

[1]) Nummern in eckigen Klammern verweisen auf das Literaturverzeichnis am Schluß.

Einzelheiten findet man dort. Hier sei nur erwähnt, daß die Teilräume $\mathfrak{H}_x$, über die „integriert" wird, spezielle Teilräume eines festen Hilbert-Raumes $\mathfrak{H}'$ sind. Also sind die Vektorfelder [vgl. (11)] Funktionen, deren Werte Vektoren aus $\mathfrak{H}'$ sind.

Im 6. Abschnitt gehen wir von einem Hilbert-Raum $\mathfrak{H}$ und einer ausgezeichneten Menge $\mathfrak{M}$ aus. $X_{\mathfrak{M}}$, $\mathfrak{K}$ und $E/\mathfrak{K}$ werden, wie oben angegeben, konstruiert. Es existiert dann ein direktes Integral $\mathfrak{S} = \int \mathfrak{H}_x d\mu$ mit einem Maß $\mu|\mathfrak{K}$ und eine unitäre Abbildung $U$ von $\mathfrak{S}$ auf $\mathfrak{H}$ so, daß das zu $\mathfrak{S} = \int \mathfrak{H}_x d\mu$ gehörige Spektralmaß $E'/\mathfrak{K}$ durch $U$ in $E/\mathfrak{K}$ übergeführt wird (Satz 2). Wendet man dieses Verfahren auf den eingangs erwähnten endlichen Fall an, so erhält man die bekannten einfachen Ergebnisse. Unser Verfahren ist also im gewissen Sinne die direkte Verallgemeinerung des elementaren Verfahrens. Wir bemerken noch: Um die Dimension des zum Punkt $x \in X_{\mathfrak{M}}$ gehörigen Hilbert-Raumes $\mathfrak{H}_x$ zu erhalten, benützen wir die Ergebnisse der allgemeinen Theorie der Vielfachheiten von Spektralmaßen, die in [5], Kap. III dargestellt ist.

Im 2. Teil der Arbeit werden die zu dem oben konstruierten direkten Integral $\mathfrak{S} = \int \mathfrak{H}_x d\mu$ gehörigen Zerlegungen von linearen Transformationen aus $\mathfrak{S}$ betrachtet. Zur Definition der Zerlegung $A \sim \boldsymbol{A}(x)$ einer Transformation $A$ in $\mathfrak{S}$ siehe 7. Abschnitt (21) und (22). Eine Transformation besitzt im allgemeinen nicht nur eine Zerlegung. Die Eindeutigkeit der Zerlegung erhält man, wenn man sich auf stetige Zerlegungen beschränkt [vgl. (24)]. In Satz 3 zeigen wir, daß genau alle Transformationen aus $\mathfrak{M}'$, d.h. alle Transformationen, die mit allen Projektionen aus $\mathfrak{M}$ vertauschbar sind, eine stetige Zerlegung besitzen. Ist $\boldsymbol{A}(x)$ bzw. $\boldsymbol{B}(x)$ bzw. $\boldsymbol{C}(x)$ die stetige Zerlegung von $A$ bzw. $B$ bzw. $AB$, dann gilt im allgemeinen nicht $\boldsymbol{C}(x) = \boldsymbol{A}(x)\,\boldsymbol{B}(x)$. Die Punkte $x \in X_{\mathfrak{M}}$, in denen $\boldsymbol{C}(x) = \boldsymbol{A}(x)\,\boldsymbol{B}(x)$ für alle $A$, $B \in \mathfrak{M}'$ gilt, nennen wir regulär. Im 11. Abschnitt wird gezeigt, daß im wesentlichen nur die isolierten Punkte von $X_{\mathfrak{M}}$ und die Punkte $x \in X_{\mathfrak{M}}$ mit endlich-dimensionalem $\mathfrak{H}_x$ regulär sind (Satz 13).

Im 8. und 9. Abschnitt wird unter anderem aus den bisherigen Ergebnissen gefolgert, daß jeder kommutative Ring $\mathfrak{R}$ (Definition s. 1. Abschnitt) isomorph zur Menge aller stetigen Funktionen über $X_{\mathfrak{R}^P}$ ist (Satz 4 und 6) und daß die selbstadjungierten Transformationen eines kommutativen Ringes einen vollständigen Vektorverband bilden (Satz 7). Im 10. Abschnitt werden diese Sätze auf gewisse Mengen normaler, nicht notwendig beschränkter Transformationen übertragen (Satz 11 und 12).

In einem Anhang wird gezeigt, daß in $X_{\mathfrak{M}}$ jede magere Menge nirgendsdicht ist.

## 1. Ausgezeichnete Mengen von Projektionen

Unter einem *Hilbert-Raum* verstehen wir wie üblich einen linearen Raum über dem Körper der komplexen Zahlen, in dem ein Skalarprodukt erklärt ist und der vollständig bezüglich der dadurch eingeführten Norm ist. Über die Dimension eines Hilbert-Raumes machen wir keine Voraussetzung; ein

Hilbert-Raum kann also endliche, abzählbare oder überabzählbare Dimension haben. Wir betrachten im folgenden aber der Bequemlichkeit halber den Raum, der nur aus dem Nullvektor besteht, nicht als Hilbert-Raum.

Es sei $\mathfrak{H}$ ein Hilbert-Raum und $\mathfrak{A}$ die Menge aller beschränkten, linearen Transformationen von $\mathfrak{H}$ in $\mathfrak{H}$. Ist $A \in \mathfrak{A}$ und $\mathfrak{L} \subset \mathfrak{H}$, so bezeichnen wir mit $A\mathfrak{L}$ das Bild von $\mathfrak{L}$ bei der Transformation $A$. Insbesondere ist also $A\mathfrak{H}$ der Wertebereich von $A$. Ist $\mathfrak{B} \subset \mathfrak{A}$, so bezeichnen wir mit $\mathfrak{B}^P$ die Menge aller Projektionen[2]) in $\mathfrak{B}$. $\mathfrak{A}^P$ ist also die Menge aller Projektionen in $\mathfrak{H}$.

In $\mathfrak{A}^P$ kann man eine *teilweise Ordnung* einführen durch

(1) $$E_1 \leq E_2 \text{ genau dann, wenn } E_1\mathfrak{H} \subset E_2\mathfrak{H}.$$

$\mathfrak{A}^P$ wird dadurch zu einem *vollständigen Verband*, d.h. das Supremum und das Infimum jeder Teilmenge von $\mathfrak{A}^P$ existiert und gehört zu $\mathfrak{A}^P$. Offensichtlich ist die identische Transformation $I$ in $\mathfrak{H}$ das größte Element und die Nulltransformation 0 das kleinste Element in $\mathfrak{A}^P$. Wenn wir im folgenden das Supremum und das Infimum einer Menge von Projektionen bilden, so meinen wir stets das in $\mathfrak{A}^P$ gebildete Supremum oder Infimum. Weitere grundlegende Eigenschaften von Projektionen findet man z.B. in [5], § 26—30. Wir werden diese Sätze ohne besondere Hinweise benützen.

Eine Teilmenge $\mathfrak{M}$ von $\mathfrak{A}^P$ heißt *Teilverband* bzw. *σ-Teilverband* bzw. *vollständiger Teilverband* von $\mathfrak{A}^P$, wenn $\mathfrak{M}$ abgeschlossen ist gegen Supremum- und Infimumbildung endlicher bzw. abzählbarer bzw. beliebiger Teilmengen von $\mathfrak{M}$. Gewisse Teilmengen von $\mathfrak{A}^P$ spielen für uns eine besondere Rolle; wir wollen sie *ausgezeichnet* nennen. Eine nicht leere Teilmenge $\mathfrak{M}$ von $\mathfrak{A}^P$ heißt ausgezeichnet, wenn gilt:

(2)
1. $\mathfrak{M}$ ist kommutativ, d.h. $E_1E_2 = E_2E_1$ für alle $E_1, E_2 \in \mathfrak{M}$.
2. Aus $E \in \mathfrak{M}$ folgt $I - E \in \mathfrak{M}$.
3. Aus $\mathfrak{N} \subset \mathfrak{M}$ folgt $\sup\{E : E \in \mathfrak{N}\} \in \mathfrak{M}$.

Da $E \leftrightarrow I - E$ eine ein-eindeutige Abbildung von $\mathfrak{M}$ auf sich selbst ist, die die Ordnung umkehrt, ist eine ausgezeichnete Menge auch gegen die Infimumbildung beliebiger Teilmengen abgeschlossen. Eine ausgezeichnete Menge $\mathfrak{M}$ ist also ein *vollständiger Teilverband* von $\mathfrak{A}^P$ und daher selbst ein *vollständiger Verband* bezüglich der durch (1) in $\mathfrak{M}$ induzierten teilweisen Ordnung. $I$ ist in diesem vollständigen Verband die *Einheit* (= das größte Element). Wir brauchen nur $I \in \mathfrak{M}$ zu zeigen. Mit $E \in \mathfrak{M}$ und $I - E \in \mathfrak{M}$ gilt auch $0 = \inf(E, I - E) \in \mathfrak{M}$ und damit auch $I = I - 0 \in \mathfrak{M}$.

Eine ausgezeichnete Menge $\mathfrak{M}$ ist sogar ein *vollständiger Boolescher Verband mit der Einheit I*. Dazu genügt es nach [1], S. 134 zu zeigen, daß für $E, F, G \in \mathfrak{M}$ mit $E \geq F \geq G$ genau ein $F' \in \mathfrak{M}$ existiert mit $\sup(F, F') = E$ und $\inf(F, F') = G$. Man rechnet leicht nach, daß nur $F' = E - F + G \in \mathfrak{M}$ diese Bedingungen erfüllt.

[2]) $E \in \mathfrak{A}$ heißt *Projektion*, wenn $E^2 = E$ und $E$ selbstadjungiert ist, d.h. $E^* = E$ ist.

Ist $\mathfrak{R}$ eine Teilmenge von $\mathfrak{A}$, so bezeichnen wir mit $\mathfrak{R}'$ die Menge aller Transformationen aus $\mathfrak{A}$, die mit allen Transformationen aus $\mathfrak{R}$ und deren adjungierten vertauschbar sind. Es gilt dann: $\mathfrak{R}' = \mathfrak{R}''' = \mathfrak{R}^{(V)} = \cdots$ und $\mathfrak{R} \subset \mathfrak{R}'' = \mathfrak{R}^{(IV)} = \cdots$. $\mathfrak{R}$ heißt *Ring*, wenn $\mathfrak{R} = \mathfrak{R}''$ ist. Ist $\mathfrak{R}$ ein kommutativer Ring, dann ist (wie man leicht beweist) $\mathfrak{R}^P$ eine ausgezeichnete Menge. Es wird sich später (in 9.) herausstellen, daß man auch jede ausgezeichnete Menge $\mathfrak{M}$ auf diese Weise gewinnen kann. Genauer gilt

$$\mathfrak{M}''^P = \mathfrak{M}. \tag{3}$$

## 2. Ausgezeichnete Mengen als Verbände

Nach dem Vorhergehenden ist eine ausgezeichnete Menge ein vollständiger Boolescher Verband. In diesem Abschnitt sollen die ausgezeichneten Mengen vom verbandstheoretischen Standpunkt aus betrachtet werden. Ist $\mathfrak{H}$ endlichdimensional, etwa $n$-dimensional, dann ist der Boolesche Verband einer ausgezeichneten Menge isomorph dem Verband aller Teilmengen einer Menge von höchstens $n$ Elementen. Im allgemeinen Fall liegen die Dinge nicht mehr so einfach.

Eine ein-eindeutige Abbildung $\varphi$ einer teilweise geordneten Menge $\mathfrak{N}$ auf eine teilweise geordnete Menge $\overline{\mathfrak{N}}$ nennen wir eine *o-Isomorphie* (Ordnungsisomorphie), wenn $\varphi(a) \geqq \varphi(b)$ mit $a \geqq b$ gleichwertig ist. Eine $o$-Isomorphie überträgt natürlich Supremum und Infimum und daher auch das relative Komplement. Ist $J$ eine Indexmenge und ist jedem $j \in J$ eine teilweise geordnete Menge $X_j$ zugeordnet, so verstehen wir unter dem *geordneten Produkt* $\Pi\{X_j : j \in J\}$ die Produktmenge der $X_j$ mit der teilweisen Ordnung $\{x_j\} \geqq \{y_j\}$ genau dann, wenn $x_j \geqq y_j$ für alle $j \in J$ gilt. Ferner nennen wir ein Element $E$ einer teilweise geordneten Menge $\mathfrak{N}$ mit einem kleinsten Element 0 ein *Atom*, wenn $E \neq 0$ ist und aus $E' \in \mathfrak{N}$ und $E' \leqq E$ entweder $E' = E$ oder $E' = 0$ folgt.

$\mathfrak{M}$ sei nun eine ausgezeichnete Menge von Projektionen in $\mathfrak{H}$. $\mathfrak{a}$ sei die Menge aller Atome in $\mathfrak{M}$ und $\alpha(\mathfrak{M})$ *die Mächtigkeit* von $\mathfrak{a}$. Da bei einem $o$-Isomorphismus Atome in Atome übergehen, ist $\alpha(\mathfrak{M})$ eine *Invariante* gegenüber $o$-Isomorphismen von ausgezeichneten Mengen. Wir setzen $E_a = \sup\{E : E \in \mathfrak{a}\}$ für $\mathfrak{a} \neq \emptyset$ [3]), $E_a = 0$ für $\mathfrak{a} = \emptyset$ und $E_c = I \quad E_a$. $\mathfrak{M}_a$ bzw. $\mathfrak{M}_c$ sei die Menge aller $E \in \mathfrak{M}$ mit $E \leqq E_a$ bzw. $E \leqq E_c$. $\mathfrak{M}_a$ und $\mathfrak{M}_c$ sind dann ebenfalls vollständige Boolesche Verbände. Die Abbildung $E \leftrightarrow (E E_a, E E_c)$ ist eine $o$-Isomorphie von $\mathfrak{M}$ auf das geordnete Produkt $\mathfrak{M}_a \times \mathfrak{M}_c$. Ist $\varphi$ eine $o$-Isomorphie von $\mathfrak{M}$ auf die ausgezeichnete Menge $\overline{\mathfrak{M}}$, dann ist die Verengung von $\varphi$ auf $\mathfrak{M}_a$ bzw. $\mathfrak{M}_c$ eine $o$-Isomorphie von $\mathfrak{M}_a$ auf $\overline{\mathfrak{M}}_a$ bzw. von $\mathfrak{M}_c$ auf $\overline{\mathfrak{M}}_c$, da Atome in Atome übergehen und Supremum-, Infimum- und Komplementbildungen übertragen werden.

$\mathfrak{M}_a$ ist ein vollständiger, atomarer Boolescher Verband und daher $o$-isomorph zum Verband $\mathfrak{P}(M)$ aller Teilmengen einer Menge $M$ der Mächtigkeit $\alpha(\mathfrak{M})$. Wir müssen nun $\mathfrak{M}_c$ noch genauer betrachten. $\mathfrak{M}_c$ ist ein vollständiger

[3]) Mit $\emptyset$ bezeichnen wir die leere Menge.

Boolescher Verband ohne Atome. Zur weiteren Behandlung von $\mathfrak{M}_c$ benötigen wir den Begriff der separablen Projektion in $\mathfrak{M}$.

Eine Projektion $E \in \mathfrak{M}$ heißt *separabel* (in $\mathfrak{M}$), wenn jede Teilmenge $\mathfrak{m}$ von $\mathfrak{M}$, die aus von Null verschiedenen paarweise orthogonalen Projektionen, die kleiner als $E$ sind, besteht, abzählbar oder endlich ist. Ist $I$ separabel, so nennen wir $\mathfrak{M}$ selbst *separabel*. (Zwei Projektionen heißen orthogonal, wenn $E_1 E_2 = \inf(E_1, E_2) = 0$ ist.)

Wir bemerken an dieser Stelle noch: Es sei vorübergehend $\mathfrak{M}$ eine Teilmenge von $\mathfrak{A}^P$, die (2) 1. und 2. erfüllt, aber statt (2) 3. nur (2) 3'.: Ist $\mathfrak{N} \subset \mathfrak{M}$ eine abzählbare Teilmenge, dann gilt $\sup\{E: E \in \mathfrak{N}\} \in \mathfrak{M}$. $\mathfrak{M}$ ist dann im allgemeinen kein vollständiger Verband, sondern nur ein $\sigma$-Verband. Ist außerdem $\mathfrak{M}$ separabel, dann folgt (2) 3. aus (2) 3'. Ist insbesondere $\mathfrak{H}$ separabel, d.h. von endlicher oder abzählbarer Dimension, dann ist $\mathfrak{M}$ stets separabel und man kann (2) 3. durch (2) 3'. ersetzen.

Nach dieser Zwischenbemerkung sei nun $\mathfrak{M}$ wieder eine ausgezeichnete Menge und $\mathfrak{P} = \mathfrak{M}'^P$. $\mathfrak{P}$ ist also die Menge aller Projektionen aus $\mathfrak{A}^P$, die mit allen Projektionen aus $\mathfrak{M}$ vertauschbar sind. Wir setzen nun ähnlich wie in [5], S. 89 für ein $P \in \mathfrak{P}$

$$C(P) = \inf\{F: P \leq F \text{ und } F \in \mathfrak{M}\}. \tag{4}$$

In [5], S. 89 wird $C(P)$ (in unserer Schreibweise) durch $C(P) = \inf\{F: P \leq F \text{ und } F \in \mathfrak{M}''^P\}$ definiert. Es wird aber in den §§ 55—59 nur verwendet, daß $\mathfrak{M}''^P$ mit $\mathfrak{P}$ vertauschbar ist und daß $\mathfrak{M}''^P$ (2) erfüllt. Diese Bedingungen erfüllt bei uns bereits $\mathfrak{M}$. Wir können daher alle Sätze und Definitionen aus §§ 55—59 einfach übernehmen. Es wird sich nachträglich sogar herausstellen, daß $\mathfrak{M}''^P = \mathfrak{M}$ ist [vgl. (3)]. Die beiden Definitionen sind also in Wirklichkeit gar nicht verschieden. Wir bemerken noch: Die Ergebnisse dieser Paragraphen lassen sich aus einfachen Eigenschaften von Projektionen ableiten. Man benötigt dazu insbesondere nicht die in [5], Kap. II bewiesenen Spektralsätze.

Ist $x \in \mathfrak{H}$, dann bezeichnen wir mit $Z(x)$ die Projektion, die auf den von $\{Ex: E \in \mathfrak{M}\}$ aufgespannten Teilraum projiziert. Nach [5], S. 91, Theorem 1 ist $Z(x) \in \mathfrak{P}$. Für $C(Z(x))$ setzen wir der Kürze halber wie in [5] $C(x)$.

*Lemma 1.* Eine Projektion $E \in \mathfrak{M}$ ist dann und nur dann separabel, wenn es ein $x \in \mathfrak{H}$ gibt mit $C(x) = E$. Es ist dann $Fx \neq 0$ für jedes $F \in \mathfrak{M}$ mit $F \leq C(x) = E$ und $F \neq 0$.

Beweis. [5], S. 92, Theorem 2 und 5 und S. 93, Theorem 3.

*Lemma 2.* Zu jedem $E \in \mathfrak{M}$ mit $E \neq 0$ gibt es ein System $\{E_j: j \in J\}$ von paarweise orthogonalen und separablen Projektionen $E_j \in \mathfrak{M}$ mit $E_j \neq 0$ und $\sup\{E_j: j \in J\} = E$.

Beweis. Nach dem Zornschen Lemma gibt es ein maximales System $\{E_j: j \in J\}$ von paarweise orthogonalen, separablen Projektionen mit $E_j \neq 0$ und $E_j \leq E$ und $E_j \in \mathfrak{M}$. Wir zeigen, daß für dieses System auch $\sup\{E_j: j \in J\} = E$ gilt. Angenommen es wäre $F = \sup\{E_j: j \in J\} \neq E$ ($F = 0$, falls $J = \emptyset$), dann

gilt für $E' = E - F \in \mathfrak{M}$, $E' \neq 0$ und $E'F = 0$, also ist auch $E'E_j = 0$ für alle $j \in J$. Wählt man nun $x \neq 0$ aus $E'\mathfrak{H}$, dann gilt $C(x) \leq E'$, denn aus [5], S. 92, Theorem 4 und $\mathfrak{P} \supset \mathfrak{M}$ folgt $Z(x) \leq E'$ und wegen (4) ist dann $C(x) \leq E'$. Wegen $C(x)x = x$ ist $C(x) \neq 0$ und nach Lemma 1 separabel. $\{E_j : j \in J\}$ kann daher durch $C(x)$ erweitert werden. Das ist ein Widerspruch zur Maximalität von $\{E_j : j \in J\}$. Also ist $F = E$, w. z. b. w.

Wir nennen ein System $\{E_j : j \in J\}$ mit den in Lemma 2 angegebenen Eigenschaften eine *separable Basis* von $E$ in $\mathfrak{M}$.

Nach diesen Vorbereitungen sind wir in der Lage eine zweite Invariante $\gamma(\mathfrak{M})$ gegenüber $o$-Isomorphismen ausgezeichneter Mengen anzugeben. Wir setzen $\gamma(\mathfrak{M}) = 0$, falls $E_c = 0$ ist, und $\gamma(\mathfrak{M}) = 1$, falls $E_c \neq 0$ und separabel ist. Liegt keiner dieser beiden Fälle vor, so setzen wir $\gamma(\mathfrak{M})$ gleich der Mächtigkeit einer separablen Basis von $E_c$ in $\mathfrak{M}$. Ist $\{E_j : j \in J\}$ eine solche Basis, dann ist $J$ sicher überabzählbar, da das Supremum von abzählbar oder endlich vielen separablen Projektionen selbst separabel ist. Aus der Beziehung $\aleph_0 \cdot \alpha = \alpha$ [4]) für Mächtigkeiten $\alpha \geq \aleph_0$ und der Separabilität der $E_j$ folgt dann, daß im letzten Fall die Mächtigkeiten zweier separablen Basen von $E_c$ gleich sind. Damit ist unsere Definition von $\gamma(\mathfrak{M})$ gerechtfertigt. $\gamma(\mathfrak{M})$ ist eine *Invariante* gegenüber $o$-Isomorphismen ausgezeichneter Mengen, da $\mathfrak{M}_c$ in $\mathfrak{M}_c$ übergeht und separable Projektionen in separable übergehen, denn alle Supremum- und Infimumbildungen bleiben erhalten.

$\alpha(\mathfrak{M})$ und $\gamma(\mathfrak{M})$ sind im allgemeinen kein vollständiges Invariantensystem. Sind $\mathfrak{M}$ und $\overline{\mathfrak{M}}$ zwei ausgezeichnete Mengen, so ist $\alpha(\mathfrak{M}) = \alpha(\overline{\mathfrak{M}})$ und $\gamma(\mathfrak{M}) = \gamma(\overline{\mathfrak{M}})$ zwar notwendig für die $o$-Isomorphie von $\mathfrak{M}$ und $\overline{\mathfrak{M}}$, aber im allgemeinen nicht hinreichend. Ist $\mathfrak{M}$ eine ausgezeichnete Menge in $\mathfrak{H}$, so ist

$$\alpha(\mathfrak{M}) \leq \dim \mathfrak{H} \quad \text{und} \quad \aleph_0 \cdot \gamma(\mathfrak{M}) \leq \dim \mathfrak{H} \text{ [5]}; \tag{5}$$

denn $E_a\mathfrak{H}$ hat mindestens die Dimension $\alpha(\mathfrak{M})$ und $E_j\mathfrak{H}$ mindestens die Dimension $\aleph_0$ für alle $j \in J$, dabei ist $\{E_j : j \in J\}$ eine separable Basis von $E_c$. Ist $\dim \mathfrak{H} \leq \aleph_0$, dann kann nur $\gamma(\mathfrak{M}) = 0$ oder $= 1$ sein.

*Lemma 3.* Ist $E_0 \neq 0$ separabel in $\mathfrak{M}$, dann ist der vollständige Boolesche Verband $\mathfrak{M}_0 = \{E : E \in \mathfrak{M} \text{ und } E \leq E_0\}$ ein Maßverband, d.h. es gibt ein endliches Maß $\mu$ über $\mathfrak{M}_0$ mit $\mu(E) = 0$ nur für $E = 0$. Als Maß $\mu$ kann man $\mu(E) = (Ex_0, x_0)$ für ein $x_0 \in \mathfrak{H}$ mit $C(x_0) = E_0$ wählen.

Beweis. Nach Lemma 1 gibt es ein $x_0 \in \mathfrak{H}$ mit $C(x_0) = E_0$. Dann ist $\mu(E) = (Ex_0, x_0)$ ein Maß, das wegen Lemma 1 die Behauptungen von Lemma 3 erfüllt.

Aus Lemma 2 und 3 folgt: $\mathfrak{M}_c$ ist $o$-isomorph zu dem geordneten Produkt von $\gamma(\mathfrak{M})$ nicht atomaren Maßverbänden $\mathfrak{M}_j$ mit $\mathfrak{M}_j = \{E : E \in \mathfrak{M} \text{ und } E \leq E_j\}$; dabei ist $\{E_j : j \in J\}$ eine separable Basis von $E_c$.

*Für ausgezeichnete Mengen aus separablen Hilbert-Räumen ist $\alpha(\mathfrak{M})$ und $\gamma(\mathfrak{M})$ ein vollständiges Invariantensystem gegen o-Isomorphismen.*

---

[4]) $\aleph_0$ = Mächtigkeit der natürlichen Zahlen.

[5]) dim $\mathfrak{H}$ = Mächtigkeit einer orthonormierten Basis von $\mathfrak{H}$.

Beweis. $\mathfrak{M}$ und $\overline{\mathfrak{M}}$ seien zwei ausgezeichnete Mengen in separablen Hilbert-Räumen mit $\alpha(\mathfrak{M}) = \alpha(\overline{\mathfrak{M}})$ und $\gamma(\mathfrak{M}) = \gamma(\overline{\mathfrak{M}})$. $\mathfrak{M}_a$ und $\overline{\mathfrak{M}}_a$ sind dann $o$-isomorph, da sie beide $o$-isomorph zu Verband aller Teilmengen einer Menge $M$ der Mächtigkeit $\alpha(\mathfrak{M})$ sind. Ist $\gamma(\mathfrak{M}) = \gamma(\overline{\mathfrak{M}}) = 0$, so ist $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}_a$ und $\overline{\mathfrak{M}} = \overline{\mathfrak{M}}_a$; also sind $\mathfrak{M}$ und $\overline{\mathfrak{M}}$ $o$-isomorph. Im Falle $\gamma(\mathfrak{M}) = \gamma(\overline{\mathfrak{M}}) = 1$ müssen wir noch die $o$-Isomorphie von $\mathfrak{M}_c$ und $\overline{\mathfrak{M}}_c$ beweisen. Es genügt dazu zu zeigen, daß bei $\gamma(\mathfrak{M}) = 1$ $\mathfrak{M}_c$ $o$-isomorph ist zum Verband $\mathfrak{T}$ aller Lebesgue-meßbaren Mengen des Intervalles $[0, 1]$ modulo Nullmengen. $\mathfrak{M}_c$ ist ein vollständiger Boolescher Verband ohne Atome. In $\mathfrak{M}_c$ führen wir durch $\mu(E) = (Ex_0, x_0) = |Ex_0|^2$ ein endliches Maß mit $\mu(E) = 0$ nur für $E = 0$ ein. Nach Lemma 3 ist dies möglich, da $E_c$ separabel ist. In $\mathfrak{M}_c$ kann man dann durch $|E_1, E_2| = \mu(\sup(E_1, E_2) - \inf(E_1, E_2)) = |E_1 x_0 - E_2 x_0|^2$ eine Metrik einführen. Nach [9], S. 386 gibt es eine Folge $E_1, E_2, \ldots$, die bezüglich dieser Metrik dicht in $\mathfrak{M}_c$ liegt. $\mathfrak{M}_c$ ist also ein *separabler Raum bezüglich dieser Metrik*. Nach einem bekannten Isomorphiesatz der Maßtheorie (vgl. [4], S. 173) ist $\mathfrak{M}_c$ $o$-isomorph zu $\mathfrak{T}$, w. z. b. w.

Im Falle eines separablen Hilbert-Raumes kann man also leicht eine vollkommene Übersicht über sämtliche möglichen Verbandstypen ausgezeichneter Mengen gewinnen. Nach dieser Zwischenbemerkung kehren wir wieder zum allgemeinen Fall zurück.

### 3. Der zu einer ausgezeichneten Menge gehörige topologische Raum

$\mathfrak{M}$ sei auch in diesem Abschnitt eine ausgezeichnete Menge von Projektionen in einem Hilbert-Raum $\mathfrak{H}$. $\mathfrak{M}$ ist ein Boolescher Verband und nach einem Satz von M. H. Stone ([11], S. 106) ist ein Boolescher Verband isomorph zu einem Mengenkörper $\mathfrak{R}_0$. Wir skizzieren kurz die Konstruktion von $\mathfrak{R}_0$ (vgl. [12]), da wir uns im weiteren Verlauf dieses Abschnittes noch eingehend mit dieser Darstellung von $\mathfrak{M}$ beschäftigen müssen.

Eine Teilmenge $\mathfrak{F}$ von $\mathfrak{M}$ heißt *Filter*, wenn

1. $\mathfrak{F} \neq \emptyset$,
2. $0 \notin \mathfrak{F}$,
3. aus $E_1, E_2 \in \mathfrak{F}$ folgt $E_1 E_2 \in \mathfrak{F}$,
4. aus $E \in \mathfrak{F}$ und $E' \in \mathfrak{M}$ und $E' \geq E$ folgt $E' \in \mathfrak{F}$.

Ein Filter $\mathfrak{F}$ heißt *Ultrafilter*, wenn $\mathfrak{F}$ nicht echte Teilmenge eines anderen Filters ist. Mit $X_{\mathfrak{M}}$ bezeichnen wir im folgenden stets die Menge aller Ultrafilter von $\mathfrak{M}$. Jedem Element $E \in \mathfrak{M}$ wird die Menge $M_E = \{\mathfrak{F} : \mathfrak{F} \in X_{\mathfrak{M}} \text{ und } E \in \mathfrak{F}\}$ zugeordnet. Diese Zuordnung ist ein-eindeutig und es gilt nach dem Satz von M. H. Stone:

$$M_{E_1} \cup M_{E_2} = M_{\sup(E_1, E_2)} \quad \text{und} \quad M_{I-E} = X_{\mathfrak{M}} - M_E. \tag{6}$$

In $X_{\mathfrak{M}}$ führen wir mit Hilfe von $\mathfrak{R}_0 = \{M_E : E \in \mathfrak{M}\}$ eine *Topologie* ein. Eine Teilmenge $M$ von $X_{\mathfrak{M}}$ heißt *offen*, wenn es zu jedem $x \in M$ ein $M_E \in \mathfrak{R}_0$ mit $x \in M_E \subset M$ gibt. Durch diese Topologie wird $X_{\mathfrak{M}}$ zu einem kompakten, total-unzusammenhängenden Hausdorff-Raum und $\mathfrak{R}_0$ ist das System aller

gleichzeitig offenen und abgeschlossenen Mengen. $X_{\mathfrak{M}}$ hat noch folgende wichtige Eigenschaft: *Die abgeschlossene Hülle jeder offenen Menge ist offen* und gehört daher zu $\mathfrak{R}_0$.

Beweis. Ist $M$ offen, dann ist $M = \cup \{M_E : M_E \subset M\}$. Es sei $F = \sup \{E : M_E \subset M\}$ und $\overline{M}$ die abgeschlossene Hülle von $M$. Wir zeigen $M_F = \overline{M}$ und haben damit die Behauptung bewiesen. Wegen $F \geq E$ ist $M_F \supset M_E$ für alle $M_E \subset M$, also ist $M_F \supset M$. Da $M_F$ abgeschlossen ist, gilt also auch $M_F \supset \overline{M}$. Wäre nun $M_F \neq \overline{M}$, dann wäre $M_F - \overline{M} \neq \emptyset$ und offen. Es gäbe also ein $E_0 \in \mathfrak{M}$ mit $E_0 \neq 0$ und $M_{E_0} \subset M_F - \overline{M} \subset M_F - M_E = M_{F-E}$ für alle $M_E \subset M$. Daher wäre $E_0 \leq F - E$, also auch $E_0 E = 0$ für alle $E$ mit $M_E \subset M$. Hieraus folgt $E_0 F = 0$ und wegen $E_0 \leq F - E \leq F$ gilt auch $E_0 F = E_0$. Es wäre also $E_0 = 0$. Das ist ein Widerspruch; es ist $M_F = \overline{M}$, w. z. b. w.

Wir ziehen aus dieser Tatsache noch zwei Folgerungen.

(7) Aus $F = \sup \{E_j : j \in J\}$ folgt $M_F = \overline{\cup \{M_{E_j} : j \in J\}}$;

dabei bezeichnen wir allgemein mit $\overline{N}$ die abgeschlossene Hülle einer Menge $N \subset X_{\mathfrak{M}}$.

Beweis. $M = \cup \{M_{E_j} : j \in J\}$ ist offen, also ist $\overline{M} = M_{F'}$ für ein $F' \in \mathfrak{M}$. Wegen $M_F \supset \overline{M}$ ist $F \geq F'$ und wegen $M_{F'} \supset M$ ist $F' \geq E_j$ für alle $j \in J$ und damit $F' \geq F$. Es ist $F' = F$ und $M_F = \overline{M}$, w. z. b. w.

*Lemma 4.* Ist $M$ eine offene Menge in $X_{\mathfrak{M}}$ und $f$ eine stetige Abbildung von $M$ in $[-\infty, +\infty]$, dann kann $f$ stetig auf ganz $X_{\mathfrak{M}}$ erweitert werden (vgl. [8], S. 215).

Beweis. Wir setzen $g(x) = 0$ für $x \notin \overline{M}$ und $g(x_0) = \inf \{\sup \{f(x) : x \in M_E \cap M\} : E \in \mathfrak{M}$ und $x_0 \in M_E\}$ für $x_0 \in \overline{M}$. $g(x)$ stimmt auf $M$ mit $f(x)$ überein. Da $\overline{M}$ gleichzeitig offen und abgeschlossen ist und $f$ stetig auf $M$ ist, brauchen wir die Stetigkeit von $g(x)$ nur noch für $x \in \overline{M} - M$ nachzuweisen. Es sei $x_0 \in \overline{M} - M$. Ist $\lambda > g(x_0)$, dann gibt es ein $E \in \mathfrak{M}$ mit $x_0 \in M_E \subset \overline{M}$ und $\sup \{f(x) : x \in M_E \cap M\} < \lambda$. Dann ist $g(x) < \lambda$ für alle $x \in M_E$ und $M_E$ ist eine Umgebung von $x_0$. Ist $g(x_0) > \lambda$ und ist $B = \{x : x \in M$ und $f(x) < \lambda\}$, dann ist $x_0 \notin \overline{B}$, da $\overline{B}$ offen und abgeschlossen ist und $g(x) \leq \lambda$ auf $\overline{B}$ ist. Also gehört $x_0$ zur offenen Menge $\overline{M} - \overline{B}$. Da $f(x) \geq \lambda$ für $x \in M \cap \overline{M} - \overline{B}$, ist $g(x) \geq \lambda$ für $x \in \overline{M} - \overline{B}$. $g$ ist daher stetig auf $\overline{M} - M$ und $X_{\mathfrak{M}}$, w. z. b. w.

*Sind $\mathfrak{M}$ und $\overline{\mathfrak{M}}$ zwei ausgezeichnete Mengen, so sind $X_{\mathfrak{M}}$ und $X_{\overline{\mathfrak{M}}}$ dann und nur dann homöomorph, wenn $\mathfrak{M}$ und $\overline{\mathfrak{M}}$ o-isomorph sind.*

Beweis. $\mathfrak{M}$ und $\overline{\mathfrak{M}}$ seien $o$-isomorph. Diese $o$-Isomorphie führt Ultrafilter in Ultrafilter über. Sie erzeugt dadurch eine Abbildung von $X_{\mathfrak{M}}$ auf $X_{\overline{\mathfrak{M}}}$. Diese Abbildung ist eine Homöomorphie. Gibt es umgekehrt eine Homöomorphie von $X_{\mathfrak{M}}$ auf $X_{\overline{\mathfrak{M}}}$, dann führt sie offene und abgeschlossene Mengen in ebensolche über. $\mathfrak{R}_0$ ist daher $o$-isomorph zu $\overline{\mathfrak{R}}_0$ und da $\mathfrak{R}_0$ bzw. $\overline{\mathfrak{R}}_0$ $o$-isomorph zu $\mathfrak{M}$ bzw. $\overline{\mathfrak{M}}$ sind, ist $\mathfrak{M}$ zu $\overline{\mathfrak{M}}$ $o$-isomorph.

Für die Homöomorphie von $X_{\mathfrak{M}}$ und $X_{\overline{\mathfrak{M}}}$ ist $\alpha(\mathfrak{M}) = \alpha(\overline{\mathfrak{M}})$ und $\gamma(\mathfrak{M}) = \gamma(\overline{\mathfrak{M}})$ notwendig und wenn $\mathfrak{M}$ und $\overline{\mathfrak{M}}$ ausgezeichnete Mengen aus separablen Hilbert-Räumen sind, ist dies sogar hinreichend.

### 4. Ausgezeichnete Mengen als Wertebereiche von Spektralmaßen

Es sei $\mathfrak{H}$ ein Hilbert-Raum und $\mathfrak{A}^P$ die Menge der Projektionen in $\mathfrak{H}$. Eine Abbildung $E$ von einem $\sigma$-Mengenkörper $\mathfrak{R}$ mit der größten Menge $X$ in $\mathfrak{H}$ heißt ein *Spektralmaß*, wenn gilt:

$$(8)\quad \begin{cases} 1.\ E(X) = I \\ 2.\ \text{Aus } M_\nu \in \mathfrak{R},\ \nu = 1, 2, \ldots \text{ und } M_\nu \cap M_\mu = \emptyset \text{ für } \nu = \mu \\ \quad \text{folgt } E\left(\bigcup_{\nu=1}^{\infty} M_\nu\right) = \sum_{\nu=1}^{\infty} E(M_\nu)\,^{6}). \end{cases}$$

Wir stellen uns in diesem Abschnitt die Aufgabe, ein Spektralmaß $E/\mathfrak{R}$ zu konstruieren, das als Wertebereich eine vorgegebene ausgezeichnete Menge $\mathfrak{M}$ besitzt. Wir geben für diese Aufgabe eine spezielle Lösung an, deren wichtigste Eigenschaft in Lemma 7 bewiesen wird. Zunächst konstruieren wir den $\sigma$-Körper $\mathfrak{R}$, der als Definitionsbereich des Spektralmaßes benützt wird.

$X_{\mathfrak{M}}$ sei der im vorigen Abschnitt betrachtete topologische Raum. Eine Teilmenge $M$ von $X_{\mathfrak{M}}$ heißt *mager* (= von 1. Kategorie), wenn $M$ Vereinigung von abzählbar vielen nirgends-dichten Mengen ist. Da $X_{\mathfrak{M}}$ kompakt ist, ist $X_{\mathfrak{M}}$ ein *Bairescher Raum* (vgl. [2], S. 7). Das Komplement einer mageren Menge ist daher überall dicht in $X_{\mathfrak{M}}$ und eine nicht leere offene Menge ist niemals mager. $\mathfrak{n}$ sei das System aller mageren Mengen. $\mathfrak{n}$ hat folgende Eigenschaften:

$$(9)\quad \begin{cases} 1.\ \text{Aus } M \in \mathfrak{n} \text{ und } N \subset M \text{ folgt } N \in \mathfrak{n}. \\ 2.\ \text{Aus } M_\nu \in \mathfrak{n},\ \nu = 1, 2, \ldots \text{ folgt } \bigcup_{\nu=1}^{\infty} M_\nu \in \mathfrak{n}. \end{cases}$$

$\mathfrak{R}$ sei der kleinste $\sigma$-Körper, der $\mathfrak{n}$ und $\mathfrak{R}_0$ (s. 3. Abschnitt) umfaßt. Alle offenen Mengen gehören zu $\mathfrak{R}$, denn aus $M$ offen folgt $\overline{M} - M$ nirgends-dicht und $\overline{M} \in \mathfrak{R}_0$, also $M \in \mathfrak{R}$.

*Lemma 5.* Zu jedem $M \in \mathfrak{R}$ gibt es genau ein $M_0 \in \mathfrak{R}_0$ mit $(M_0 - M) \cup (M - M_0) \in \mathfrak{n}$.

Beweis. Eindeutigkeit: Es sei $(M - M_0) \cup (M_0 - M) \in \mathfrak{n}$ und $(M - M_1) \cup (M_1 - M) \in \mathfrak{n}$ mit $M_0, M_1 \in \mathfrak{R}_0$. Dann ist wegen $(M_1 - M_0) \cup (M_0 - M_1) \subset (M - M_0) \cup (M_0 - M) \cup (M - M_1) \cup (M_1 - M)$ auch $(M_1 - M_0) \cup (M_0 - M_1) \in \mathfrak{n}$. Diese Menge ist aber offen, also leer, und daher ist $M_1 = M_0$.

Existenz: $\mathfrak{R}'$ sei die Menge aller $M \subset X_{\mathfrak{M}}$, zu denen ein $M_0 \in \mathfrak{R}_0$ existiert mit $(M_0 - M) \cup (M - M_0) \in \mathfrak{n}$. Es ist $\mathfrak{R}_0 \cup \mathfrak{n} \subset \mathfrak{R}'$ und $\mathfrak{R}' \subset \mathfrak{R}$. Wenn wir noch zeigen, daß $\mathfrak{R}'$ ein $\sigma$-Körper ist, so ist $\mathfrak{R} = \mathfrak{R}'$. Mit $M$ gehört auch $X_{\mathfrak{M}} - M$ zu $\mathfrak{R}'$, denn $\big((X_{\mathfrak{M}} - M_0) - (X_{\mathfrak{M}} - M)\big) \cup \big((X_{\mathfrak{M}} - M) - (X_{\mathfrak{M}} - M_0)\big) = (M - M_0) \cup (M_0 - M)$. Aus $M_\nu \in \mathfrak{R}'$, $\nu = 1, 2, \ldots$, folgt $\bigcup_{\nu=1}^{\infty} M_\nu = M \in \mathfrak{R}'$. Zu jedem $M_\nu$ gibt es ein $M_{\nu,0} \in \mathfrak{R}_0$ mit $(M_\nu - M_{\nu,0}) \cup (M_{\nu,0} - M_\nu) \in \mathfrak{n}$. Es ist dann nach (9) $\Big(M - \bigcup_{\nu=1}^{\infty} M_{\nu,0}\Big) \cup \Big(\bigcup_{\nu=1}^{\infty} M_{\nu,0} - M\Big) \subset \bigcup_{\nu=1}^{\infty} (M_\nu - M_{\nu,0}) \cup \bigcup_{\nu=1}^{\infty} (M_{\nu,0} - M_\nu) \in \mathfrak{n}$. Ferner gilt

[6]) $E = \sum_{j \in J} E_j$ bedeutet $Ex = \sum_{j \in J} E_j x$ für alle $x \in \mathfrak{H}$.

$\overline{\bigcup_{\nu=1}^{\infty} M_{\nu,0}} - \bigcup_{\nu=1}^{\infty} M_{\nu,0} \in \mathfrak{n}$, da $\bigcup_{\nu=1}^{\infty} M_{\nu,0}$ offen ist. Es gilt also insgesamt $\left(M - \overline{\bigcup_{\nu=1}^{\infty} M_{\nu 0}}\right) \cup \left(\overline{\bigcup_{\nu=1}^{\infty} M_{\nu,0}} - M\right) \in \mathfrak{n}$ und $\overline{\bigcup_{\nu=1}^{\infty} M_{\nu,0}} \in \mathfrak{R}_0$ und daher $\bigcup_{\nu=1}^{\infty} M_\nu \in \mathfrak{R}'$, w. z. b. w.

Wir müssen jetzt noch eine Abbildung $E$ von $\mathfrak{R}$ auf $\mathfrak{M}$ erklären. Zu $M \in \mathfrak{R}$ gibt es nach Lemma 5 genau ein $M_0 \in \mathfrak{R}_0$ mit $(M_0 - M) \cup (M - M_0) \in \mathfrak{n}$ und zu $M_0$ genau ein $E_0 \in \mathfrak{M}$ mit $M_{E_0} = M_0$; wir setzen nun $E(M) = E_0$ und erhalten eine Abbildung von $\mathfrak{R}$ auf $\mathfrak{M}$, da bereits $\mathfrak{R}_0$ auf $\mathfrak{M}$ abgebildet wird.

*Lemma 6.* Die Abbildung $M \to E(M)$ des $\sigma$-Körpers $\mathfrak{R}$ auf die ausgezeichnete Menge $\mathfrak{M}$ ist eine $\sigma$-Homomorphie, d.h. es gilt:

1. $E(X_{\mathfrak{M}} - M) = I - E(M)$.
2. Aus $M_\nu \in \mathfrak{R}$, $\nu = 1, 2, \ldots$ folgt $E\left(\bigcup_{\nu=1}^{\infty} M_\nu\right) = \sup\{E(M_\nu) : \nu = 1, 2, \ldots\}$.

Außerdem gilt:

3. $E(M) = 0$ genau dann, wenn $M \in \mathfrak{n}$.

Beweis. Zu 1.: Gehört $M_0 \in \mathfrak{R}_0$ zu $M \in \mathfrak{R}$, so gehört $X_{\mathfrak{M}} - M_0 \in \mathfrak{R}_0$ zu $X_{\mathfrak{M}} - M \in \mathfrak{R}$ (vgl. Beweis von Lemma 5). Also ist $E(X_{\mathfrak{M}} - M) = E(X_{\mathfrak{M}} - M_0) = E(X_{\mathfrak{M}}) - E(M_0) = I - E(M)$.

Zu 2.: $E\left(\bigcup_{\nu=1}^{\infty} M_\nu\right) = E\left(\overline{\bigcup_{\nu=1}^{\infty} M_{\nu,0}}\right)$ (vgl. Beweis von Lemma 5) $= \sup\{E(M_{\nu,0}) : \nu = 1, 2, \ldots\}$ [nach (7)] $= \sup\{E(M_\nu) : \nu = 1, 2, \ldots\}$.

Zu 3.: $E(M) = 0$ ist gleichwertig mit $E(M_0) = 0$ für das zu $M$ gehörige $M_0 \in \mathfrak{R}_0$. Dies ist wiederum gleichwertig mit $M_0 = \emptyset$, also ist $M \in \mathfrak{n}$.

**Satz 1.** *Die Abbildung $M \to E(M)$ ist ein Spektralmaß $E/\mathfrak{R}$ mit dem Wertebereich $\mathfrak{M}$. Das System der E-Nullmengen ist* $\mathfrak{n}$.

Beweis. Wegen Lemma 6 haben wir nur noch zu zeigen, daß $E/\mathfrak{R}$ ein Spektralmaß ist. $E(X_{\mathfrak{M}}) = I$ ist erfüllt. Es sei $M_\nu \in \mathfrak{R}$, $\nu = 1, 2, \ldots$ und $M_\nu \cap M_\mu = \emptyset$ für $\nu \neq \mu$, dann ist nach Lemma 6 $E(M_\nu \cap M_\mu) = 0 = \inf\left(E(M_\nu), E(M_\mu)\right) = E(M_\nu) E(M_\mu)$. Die $E(M_\nu)$ sind also paarweise orthogonal. Nach Lemma 6 ist ferner $E\left(\bigcup_{\nu=0}^{\infty} M_\nu\right) = \sup\{E(M_\nu) : \nu = 1, 2, \ldots\} = \sum_{\nu=1}^{\infty} E(M_\nu)$. Die letzte Gleichung gilt wegen der paarweisen Orthogonalität nach [5], S. 49.

Wir benötigen im folgenden noch eine wichtige Eigenschaft der $\mathfrak{R}$-meßbaren Funktionen. Eine reelle Funktion $f$ über $X_{\mathfrak{M}}$ mit Werten aus $[-\infty, +\infty]$ heißt *$\mathfrak{R}$-meßbar*, wenn die Mengen $\{x : f(x) \geq \lambda\}$ für alle endlichen reellen Zahlen $\lambda$ aus $\mathfrak{R}$ sind. Komplexwertige Funktionen nennen wir $\mathfrak{R}$-meßbar, wenn Real- und Imaginärteil $\mathfrak{R}$-meßbar sind.

*Lemma 7.* Zu jeder $\mathfrak{R}$-meßbaren reellen Funktion $f$ gibt es eine und nur eine stetige Funktion $g$, so daß $\{x : f(x) \neq g(x)\} \in \mathfrak{n}$ ist.

Beweis. Existenz: Wir können uns auf $f \geq 0$ beschränken. Wir definieren $f_n$ durch

$$f_n(x) = \begin{cases} n \text{ für } f(x) \geq n \\ \frac{m}{2^n} \text{ für } \frac{m+1}{2^n} > f(x) \geq \frac{m}{2^n}, \end{cases} \qquad m = 0, 1, \ldots, 2^n n - 1.$$

Offenbar ist $f_n$ $\mathfrak{R}$-meßbar und $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ für alle $x \in X_{\mathfrak{M}}$. Weiter sei

$$M_{n,m} = \left\{x: \frac{m+1}{2^n} > f(x) \geqq \frac{m}{2^n}\right\}, \quad m = 0, 1, \ldots, 2^n n - 1$$

und

$$M_{n,2^n n} = \{x: f(x) \geqq n\}.$$

$M^0_{n,m}$ seien diejenigen Mengen aus $\mathfrak{R}_0$, die sich nur um eine magere Menge von $M_{n,m}$ unterscheiden. Es ist $M^0_{n,m} \cap M^0_{n,m'} = \emptyset$ für $m \neq m'$, da $M_{n,m} \cap M_{n,m'} = \emptyset$, also $M^0_{n,m} \cap M^0_{n,m'} \in \mathfrak{n}$ und $M^0_{n,m} \cap M^0_{n,m'}$ offen ist. Nun setzen wir

$$g_n(x) = \begin{cases} n & \text{für } x \in M^0_{n,2^n n} \\ \dfrac{m}{2^n} & \text{für } x \in M^0_{n,m},\ m < 2^n n. \end{cases}$$

$g_n$ ist stetig und nur auf einer mageren Menge von $f_n$ verschieden. Ferner ist die Folge $g_n$ nicht fallend und gleichmäßig konvergent. Also ist $g(x) = \lim_{n\to\infty} g_n(x)$ stetig und höchstens auf einer mageren Menge von $f$ verschieden [nach (9)].

Eindeutigkeit: Seien $g_1$ und $g_2$ stetige Funktionen mit $\{x: f(x) \neq g_i(x)\} \in \mathfrak{n}$, $i = 1, 2$, dann ist auch $\{x: g_1(x) \neq g_2(x)\} \in \mathfrak{n}$. Diese Menge ist aber wegen der Stetigkeit der $g_i$ offen und daher leer, w. z. b. w.

Da alle offenen Mengen zu $\mathfrak{R}$ gehören, sind alle stetigen Funktionen $\mathfrak{R}$-meßbar, und da eine Änderung auf einer mageren Menge die $\mathfrak{R}$-Meßbarkeit nicht ändert, gilt: Die $\mathfrak{R}$-meßbaren Funktionen sind genau die Funktionen über $X_{\mathfrak{M}}$, die sich nur auf einer mageren Menge von einer stetigen unterscheiden.

### 5. Das direkte Integral

Wir führen in diesem Abschnitt den Begriff des direkten Integrals ein (vgl. [10] und [3]). Es sei $\mathfrak{H}'$ ein Hilbert-Raum und $\{e_k: k \in K\}$ eine orthonormierte Basis von $\mathfrak{H}'$. Ferner sei $\mathfrak{R}$ ein $\sigma$-Mengenkörper mit der größten Menge $X$ und $\mu$ ein vollständiges Maß über $\mathfrak{R}$. Jedem Punkt $x \in X$ sei eine Teilmenge $K_x \subset K$ zugeordnet und $\mathfrak{H}_x$ sei der von $\{e_k: k \in K_x\}$ aufgespannte Teilraum von $\mathfrak{H}'$. Wir fordern nun:

(10)
1. Die $\mathfrak{H}_x$ mit $x \in X$ spannen $\mathfrak{H}'$ auf (d.h. $\mathfrak{H}'$ ist nicht überflüssig groß).
2. Für $x, y \in X$ ist entweder $\mathfrak{H}_x \supset \mathfrak{H}_y$ oder $\mathfrak{H}_y \supset \mathfrak{H}_x$. Das ist gleichwertig mit $K_x \supset K_y$ oder $K_y \supset K_x$.
3. $\{x: k \in K_x\} \in \mathfrak{R}$ für alle $k \in K$.

Eine Funktion $f$ mit dem Definitionsbereich $X$ heißt ein *Vektorfeld*, wenn

(11) $$f(x) \in \mathfrak{H}_x \text{ für alle } x \in X.$$

$\mathfrak{S}$ sei nun die Menge aller Vektorfelder $f$ mit folgenden Eigenschaften:

(12)
1. $(f(x), e_k)$ ist $\mathfrak{R}$-meßbar für alle $k \in K$.
2. Zu $f$ gibt es eine $\mu$-Nullmenge $N_f$ mit $(f(x), e_k) \equiv 0$ auf $X - N_f$ für alle $k \in K$ bis auf abzählbar viele Ausnahmen.
3. $\int |f(x)|^2 \, d\mu < +\infty$.

Die Existenz von $\int |f(x)|^2 d\mu$ folgt aus 1. und 2.; in 3. wird für die Vektorfelder aus $\mathfrak{S}$ die Endlichkeit dieses Integrals gefordert. Wir führen in $\mathfrak{S}$ durch

$$(f, g) = \int (f(x), g(x))\, d\mu \tag{13}$$

ein *Skalarprodukt* ein. $\mathfrak{S}$ ist dann unitär-isomorph der direkten Summe der Hilbert-Räume $\mathfrak{L}_k$, $k \in K$, wobei $\mathfrak{L}_k$ der Hilbert-Raum aller über $M_k = \{x: k \in K_x\} = \{x: e_k \in \mathfrak{H}_x\}$ quadratisch $\mu$-integrierbaren Funktionen ist. $\mathfrak{S}$ ist also ein Hilbert-Raum. (Wie üblich werden dabei alle $f$ aus $\mathfrak{S}$ gleichgesetzt, die sich nur auf einer $\mu$-Nullmenge unterscheiden.) Wir nennen $\mathfrak{S}$ *das direkte Integral der* $\mathfrak{H}_x$ *mit dem Maß* $\mu/\mathfrak{R}$ und schreiben dafür $\mathfrak{S} = \int \mathfrak{H}_x d\mu$.

*Lemma 8.* Ist $\mathfrak{S} = \int \mathfrak{H}_x d\mu$ und $f = \lim_{n\to\infty} f_n$ in $\mathfrak{S}$, dann gibt es eine Teilfolge $f_{n_1}, f_{n_2}, \ldots$ mit $f(x) = \lim_{\nu\to\infty} f_{n_\nu}(x)$ $\mu$-fast überall. Ist umgekehrt $f_{n_1}, f_{n_2}, \ldots$ eine Teilfolge von $f_1, f_2, \ldots$, die $\mu$-fast überall konvergiert, so ist $\lim_{\nu\to\infty} f_{n_\nu}(x) = f(x)$ $\mu$-fast überall.

Den Beweis von Lemma 8 kann man durch direkte Übertragung des Beweises für den entsprechenden Satz für quadratisch integrierbare Funktionen führen (vgl. [*10*], S. 413, Beweis von Lemma 2). Wir übergehen diesen Beweis.

Ist $\mathfrak{S} = \int \mathfrak{H}_x d\mu$ mit dem Maße $\mu/\mathfrak{R}$, so ordnen wir jedem $M \in \mathfrak{R}$ eine Transformation $E(M)$ in $\mathfrak{S}$ zu, indem wir $E(M) f = \chi_M f$ für alle $f \in \mathfrak{S}$ setzen ($\chi_M$ = charakteristische Funktion von $M$). $E(M)$ ist dann eine Projektion in $\mathfrak{S}$ und die Abbildung $M \to E(M)$ ist ein Spektralmaß $E/\mathfrak{R}$ in $\mathfrak{S}$. Wir nennen $E/\mathfrak{R}$ *das zum direkten Integral* $\mathfrak{S} = \int \mathfrak{H}_x d\mu$ *gehörige Spektralmaß.*

Im nächsten Abschnitt werden wir folgendes Problem zu lösen haben: Gegeben ist ein Hilbert-Raum $\mathfrak{H}$ und ein Spektralmaß $E/\mathfrak{R}$ in $\mathfrak{H}$. Gesucht ist ein direktes Integral $\mathfrak{S}$ und eine unitäre Abbildung $U$ von $\mathfrak{S}$ auf $\mathfrak{H}$, so daß

$$U^{-1} E(M)\, U = E'(M) \quad \text{für alle } M \in \mathfrak{R}; \tag{14}$$

dabei ist $E'/\mathfrak{R}$ das zu $\mathfrak{S}$ gehörige Spektralmaß.

## 6. Das Umkehrproblem

Im folgenden sei $\mathfrak{H}$ ein Hilbert-Raum und $\mathfrak{M}$ eine ausgezeichnete Menge in $\mathfrak{H}$. Wenn $\mathfrak{M}$ nur endlich viele Elemente enthält (dies ist z.B. stets der Fall, wenn $\mathfrak{H}$ endlich-dimensional ist), so können wir $\mathfrak{H}$ so als direkte Summe $\mathfrak{H} = \bigoplus_{\nu=1}^{n} \mathfrak{H}_\nu$ darstellen, daß die ausgezeichnete Menge $\mathfrak{M}$ zu dieser direkten Summe gehört. Im allgemeinen Fall ist dies wegen des Auftretens nicht atomarer Verbände nicht möglich. Wir betrachten daher das folgende allgemeinere *Umkehrproblem*: Gesucht ist ein direktes Integral $\mathfrak{S} = \int \mathfrak{H}_x d\mu$ und eine unitäre Abbildung $U$ von $\mathfrak{S}$ auf $\mathfrak{H}$, so daß das zu $\mathfrak{S}$ gehörige Spektralmaß $E'/\mathfrak{R}$ durch

$$U E'(M)\, U^{-1} = E(M)$$

in ein Spektralmaß $E/\mathfrak{R}$ in $\mathfrak{H}$ übergeführt wird, das den Wertebereich $\mathfrak{M}$ besitzt. Für dieses Problem geben wir in diesem Abschnitt eine spezielle Lösung

an. Unsere Lösungsmethode führt im endlichen Fall auf die bekannten einfachen Ergebnisse; sie ist sozusagen die „natürliche" Verallgemeinerung der elementaren Methode.

Wir gehen folgendermaßen vor: Gegeben ist also der Hilbert-Raum $\mathfrak{H}$ und die ausgezeichnete Menge $\mathfrak{M}$. Im 3. Abschnitt konstruierten wir den topologischen Raum $X_{\mathfrak{M}}$ und im 4. Abschnitt den $\sigma$-Körper $\mathfrak{R}$ und das Spektralmaß $E/\mathfrak{R}$, das den Wertebereich $\mathfrak{M}$ besitzt. Unser Umkehrproblem ist also gelöst, wenn wir das am Ende des vorigen Abschnittes gestellte Problem für den Hilbert-Raum $\mathfrak{H}$ und das Spektralmaß $E/\mathfrak{R}$ gelöst haben. Wir müssen ein direktes Integral $\mathfrak{Z} = \int \mathfrak{H}_x d\mu$ mit einem Maß $\mu/\mathfrak{R}$ und einem zugehörigen Spektralmaß $E'/\mathfrak{R}$ und eine unitäre Transformation $U$ so konstruieren, daß (14) erfüllt ist. Wir konstruieren dazu zunächst ein geeignetes Maß $\mu/\mathfrak{R}$ und dann die Räume $\mathfrak{H}_x$ so, daß (10) erfüllt ist. Dann definieren wir mit Hilfe von (11), (12) und (13) das direkte Integral $\mathfrak{Z}$ und zeigen, daß (14) tatsächlich erfüllt ist. Wir führen nun dieses Programm durch.

Zuerst verschaffen wir uns ein geeignetes Maß $\mu/\mathfrak{R}$. Nach Lemma 2 gibt es eine separable Basis von $I$ in $\mathfrak{M}$. $\{E_j : j \in J\}$ sei eine solche Basis. Zu jedem $j \in J$ gibt es genau ein $M_j \in \mathfrak{R}_0$ mit $E(M_j) = E_j$. Diese $M_j$ sind paarweise fremd [nach (6)]. Nach Lemma 1 gibt es zu jedem $j \in J$ ein $x_j \in \mathfrak{H}$ mit $C(x_j) = E_j$. Dann ist

$$\mu_j(M) = (E(M)\, x_j, x_j) \text{ für } M \in \mathfrak{R}_j = \{M : M \in \mathfrak{R} \text{ und } M \subset M_j\} \tag{15}$$

ein endliches Maß über $\mathfrak{R}_j$. Wir setzen nun

$$\mu(M) = \sum_{j \in J} \mu_j(M \cap M_j) \text{ für } M \in \mathfrak{R} \tag{16}$$

und zeigen, daß dies ein Maß über $\mathfrak{R}$ ist.

Beweis. a) $\mu(\emptyset) = \sum_{j \in J} \mu_j(\emptyset) = 0$.

b) Es sei $M_\nu \in \mathfrak{R}$, $\nu = 1, 2, \ldots$ und $M_\nu \cap M_\mu = \emptyset$ für $\nu \neq \mu$, dann gilt:

$$\mu\Big(\bigcup_{\nu=1}^{\infty} M_\nu\Big) = \sum_{j \in J} \mu_j\Big(M_j \cap \bigcup_{\nu=1}^{\infty} M_\nu\Big) = \sum_{j \in J} \sum_{\nu=1}^{\infty} \mu_j(M_j \cap M_\nu) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{j \in J} \mu_j(M_j \cap M_\nu) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \mu(M_\nu).$$

Die Vertauschung der Summen ist erlaubt, da alle Summanden positiv sind.

Wir benötigen noch folgendes Lemma.

*Lemma 9.* Ist $\sup\{E_j : j \in J\} = I$ mit $E_j \in \mathfrak{M}$, $E_j \neq 0$ und ist $M_j \in \mathfrak{R}_0$ mit $E(M_j) = E_j$, dann ist $M \in \mathfrak{R}$ gleichwertig mit $M \cap M_j \in \mathfrak{R}$ für alle $j \in J$ und $M \in \mathfrak{n}$ gleichwertig mit $M \cap M_j \in \mathfrak{n}$ für alle $j \in J$.

Beweis. a) Aus $M \in \mathfrak{R}$ folgt $M \cap M_j \in \mathfrak{R}$ und aus $M \in \mathfrak{n}$ folgt $M \cap M_j \in \mathfrak{n}$.

b) Es sei $M \cap M_j \in \mathfrak{R}$ für alle $j \in J$.

$\alpha$) $\cup \{M_j : j \in J\} = M'$ ist offen und $\overline{M'} = X_{\mathfrak{M}}$ nach (7). Also ist $X_{\mathfrak{M}} - M' \in \mathfrak{n}$ und daher auch jede Teilmenge von $X_{\mathfrak{M}} - M' \in \mathfrak{R}$. Es genügt also $M \cap M' \in \mathfrak{R}$ zu zeigen.

$\beta$) Nach Lemma 5 gibt es zu jedem $M \cap M_j$ genau ein $M^j \in \mathfrak{R}_0$ mit $N_j = (M^j - M \cap M_j) \cup (M \cap M_j - M^j) \in \mathfrak{n}$. Wegen $M^j \subset M_j$ ist auch $N_j \subset M_j$. $\cup \{M^j : j \in J\} \in \mathfrak{R}$, da diese Menge offen ist. Wegen $\big(\cup \{M^j : j \in J\} - M \cap M'\big) \cup$

$(M \cap M' - \cup\{M^j : j \in J\}) \subset \cup\{N_j : j \in J\}$ genügt es nun zu zeigen, daß $\cup\{N_j : j \in J\} \in \mathfrak{n}$ gilt. Ist $M \cap M_j \in \mathfrak{n}$, dann ist $M^j = \emptyset$, also $N_j = M \cap M_j$. Wegen $M \subset (X_{\mathfrak{M}} - M') \cup \cup\{N_j : j \in J\}$ gehört mit $\cup\{N_j : j \in J\}$ auch $M$ zu $\mathfrak{n}$.

$\gamma$) Wegen $N_j \in \mathfrak{n}$ und $N_j \subset M_j$ gibt es abzählbar viele, nirgends-dichte Mengen $N_{j,\nu}$ mit $N_j = \bigcup_{\nu=1}^{\infty} N_{j,\nu}$ und $N_{j,\nu} \subset M_j$. Wenn wir noch zeigen, daß auch $N_\nu = \cup\{N_{j,\nu} : j \in J\}$ nirgends-dicht ist, dann ist $\cup\{N_j : j \in J\} = \bigcup_{\nu=1}^{\infty} N_\nu \in \mathfrak{n}$. Wir nehmen nun an, daß $N_\nu$ nicht nirgends-dicht sei, dann gibt es eine nicht leeres und offenes $M_0$ mit $M_0 \subset \overline{N}_\nu$. Da $\overline{M}' = X_{\mathfrak{M}}$ ist, gibt es ein $M_{j_0}$ mit $M_{j_0} \cap M_0 \neq \emptyset$. Wir können daher $M_0 \subset M_{j_0}$ annehmen. $N_\nu' = \cup\{N_{j,\nu} : j \in J \text{ und } j \neq j_0\}$ ist fremd zu $M_{j_0}$, und da $M_{j_0}$ offen ist, ist auch $\overline{N}_\nu' \cap M_{j_0} = \emptyset$. Es gilt daher $M_0 = M_0 \cap \overline{N}_\nu = M_0 \cap (\overline{N}_\nu' \cup \overline{N}_{j_0,\nu}) = M_0 \cap \overline{N}_{j_0,\nu}$. Da $N_{j,\nu}$ nirgends-dicht ist, ist $M_0$ nirgends-dicht. Andererseits ist $M_0$ offen, also ist $M_0 = \emptyset$. Das ist ein Widerspruch.

Aus dem Lemma folgt noch:

(17) $\mu(M) = 0$ ist gleichwertig mit $M \in \mathfrak{n}$.

Beweis. a) Aus $M \in \mathfrak{n}$ folgt $M \cap M_j \in \mathfrak{n}$. Nach Satz 1 dann $E(M \cap M_j) = 0$, also auch $\mu_j(M \cap M_j) = 0$ und damit $\mu(M) = 0$.

b) Aus $\mu(M) = 0$ folgt $\mu_j(M \cap M_j) = 0$ für alle $j \in J$. Nach Lemma 1 ist dann auch $E(M \cap M_j) = 0$. Nach Satz 1 ist $M \cap M_j \in \mathfrak{n}$ für alle $j \in J$, also $M \in \mathfrak{n}$; w. z. b. w.

Zur Konstruktion des direkten Integrals $\mathfrak{S} = \int \mathfrak{H}_x d\mu$ benötigen wir eine Reihe von Sätzen aus [5], § 60—64. Ab § 60 findet in [5] (in unserer Terminologie gesprochen) die Tatsache Verwendung, daß die ausgezeichnete Menge $\mathfrak{M}$ Wertebereich eines Spektralmaßes ist. In Satz 1 wurde gezeigt, daß wir dies jederzeit annehmen können. Es gelten deshalb die Sätze von § 60—64 auch für unseren Fall. Wir wollen hier noch die zum Verständnis der Sätze aus diesen Paragraphen notwendigen Definitionen (in unserer Terminologie) angeben. Eine Projektion $R \in \mathfrak{P} = \mathfrak{M}'^P$ heißt eine *Reihe*, wenn für alle $P \in \mathfrak{P}$ mit $P \leq R$ gilt $P = C(R)P$. Ist $E \in \mathfrak{M}$, dann heißt ein System $\{R_j : j \in J\}$ von von Null verschiedenen, paarweise orthogonalen Reihen ein *Orthogonalsystem* vom Typ $E$, wenn $C(R_j) = E$ für alle $j \in J$ gilt. Wegen [5], S. 99, Theorem 1 kann man nun die *Vielfachheit* $u(E)$ für ein $E \in \mathfrak{M}$ als die Mächtigkeit eines maximalen, orthogonalen Systems vom Typ $E$ definieren. Wir sagen $E \in \mathfrak{M}$ besitzt *gleichmäßige Vielfachheit*, wenn $u(E_0) = u(E)$ für alle $E_0 \in \mathfrak{M}$ mit $E_0 \neq 0$ und $E_0 \leq E$ gilt.

Wir kommen nun zur Konstruktion des direkten Integrals. Nach [5], S. 102, Theorem 5 gilt: Wenn $E_u \in \mathfrak{M}$ für jede Kardinalzahl $1 \leq u \leq \dim \mathfrak{H}$ das Supremum aller Projektionen aus $\mathfrak{M}$ mit der gleichmäßigen Vielfachheit $u$ ist, dann ist $\{E_u : u \leq \dim \mathfrak{H}\}$ ein orthogonales System, $\sup\{E_u : u \leq \dim \mathfrak{H}\} = I$ und $E_u = 0$[7]) oder $E_u$ von der gleichmäßigen Vielfachheit $u$. Es sei $M_u \in \mathfrak{R}_0$ mit $E(M_u) = E_u$. $K'$ sei eine Menge der Mächtigkeit $\sup\{u : E_u \neq 0\}$. Wir

[7]) Wir setzen $\sup\{E : E \in \emptyset\} = 0$.

ordnen jedem $u$ mit $E_u \neq 0$ eine Teilmenge $K_u \subset K'$ von der Mächtigkeit $u$ so zu, daß aus $u < u'$ folgt $K_u \subset K_{u'}$. Für $x \in M_u$ setzen wir $K_x = K_u$. Damit haben wir jedem Punkt $x \in M_0 = \cup\{M_u : E_u \neq 0\}$ eine Menge $K_x$ zugeordnet. Nach (7) ist $\overline{M}_0 = X_{\mathfrak{M}}$. Es sei $k \in K'$. Wir betrachten die Funktionen $f_k$ mit $f_k(x) = 1$ für $k \in K_x$ und $= 0$ für $k \notin K_x$. Es ist dann $f_k$ zunächst auf $M_0$ erklärt und $f_k(x) = 1$ für $x \in M_u$ mit $k \in K_u$ und sonst $f_k(x) = 0$. Diese Funktionen sind stetig auf $M_0$. Nach Lemma 4 kann man $f_k$ auf $X_{\mathfrak{M}}$ stetig fortsetzen und wegen $\overline{M}_0 = X_{\mathfrak{M}}$ ist dies nur auf eine Weise möglich. Diese Fortsetzung bezeichnen wir ebenfalls mit $f_k$. Wir setzen nun

$$K_x = \{k : f_k(x) = 1\}. \tag{18}$$

Auf $M_0$ liefert dies offensichtlich die alten Mengen $K_x$.

Es sei $K = \cup\{K_x : x \in X_{\mathfrak{M}}\}$ und $\mathfrak{H}'$ ein Hilbert-Raum mit der orthonormierten Basis $\{e_k : k \in K\}$. Wir ordnen jedem $x \in X_{\mathfrak{M}}$ den von $\{e_k : k \in K_x\}$ aufgespannten Teilraum $\mathfrak{H}_x$ von $\mathfrak{H}'$ zu. Diese Zuordnung erfüllt (10). Zuvor zeigen wir noch, daß $\mathfrak{H}_x \neq \{0\}$ für alle $x \in X_{\mathfrak{M}}$ ist. Das ist gleichwertig mit $K_x \neq \emptyset$ für alle $x \in X_{\mathfrak{M}}$. Für $u_0 = \inf\{u : E_u \neq 0\}$ gilt $E_{u_0} \neq 0$, da Mengen von Kardinalzahlen der Größe nach wohlgeordnet sind. Für $k_0 \in K_{u_0}$ gilt $f_{k_0}(x) = 1$ für alle $x \in M_0$, also auch für alle $x \in X_{\mathfrak{M}}$. Für jedes $x \in X_{\mathfrak{M}}$ ist daher $k_0 \in K_x$, also $K_x \neq \emptyset$.

Zu (10) 1. Wegen $K = \cup\{K_x : x \in X_{\mathfrak{M}}\}$ ist (10) 1. erfüllt.

Zu (10) 2. Wir müssen zeigen: Wenn es ein $K$ mit $k \in K_{x_0}$ und $k \notin K_{y_0}$ gibt, dann ist $K_{x_0} > K_{y_0}$. Für $x_0, y_0 \in M_0$ ist dies wegen unserer Wahl der $K_u$ richtig. Es seien nun $x_0, y_0 \in X_{\mathfrak{M}}$ beliebig, dann ist nach (18) $f_k(x) = 1$ in einer Umgebung $U(x_0)$ von $x_0$ und $= 0$ in einer Umgebung $U(y_0)$ von $y_0$. Für $x \in U(x_0) \cap M_0$ und $y \in U(y_0) \cap M_0$ gilt es also stets $K_x \supset K_y$. Es sei nun $k_0 \in K_{y_0}$, dann gibt es wegen der Stetigkeit von $f_{k_0}$ ein $y_1 \in U(y_0) \cap M_0$ mit $k_0 \in K_{y_1}$. Es ist aber $K_x \supset K_{y_1}$ für alle $x \in U(x_0) \cap M_0$ und damit $f_{k_0}(x) = 1$ in $U(x_0)$. Also ist $k_0 \in K_{x_0}$.

Zu (10) 3. $\{x : k \in K_x\} = \{x : f_k(x) = 1\} \in \mathfrak{R}_0 \subset \mathfrak{R}$, da $f_k$ stetig ist und nur die Werte 0 und 1 annimmt.

Da (10) erfüllt ist, können wir mit Hilfe von (11), (12) und (13) das direkte Integral $\mathfrak{S} = \int \mathfrak{H}_x d\mu$ erklären. Dieses direkte Integral ist eine Lösung unseres Umkehrproblems. Dazu haben wir zu zeigen, daß es eine unitäre Abbildung $U$ von $\mathfrak{S}$ auf $\mathfrak{H}$ gibt, die das zu $\mathfrak{S}$ gehörige Spektralmaß $E'/\mathfrak{R}$ in das Spektralmaß $E/\mathfrak{R}$ mit dem Wertebereich $\mathfrak{M}$ im Sinne von (14) überführt.

$\{E_j : j \in J\}$ sei die separable Basis von $I$ in $\mathfrak{M}$, die wir bereits zur Konstruktion von $\mu/\mathfrak{R}$ verwendet haben. Wir setzen $E_{j,u} = E_j E_u$ und $M_{j,u} = M_u \cap M_j$; dann ist $E(M_{j,u}) = E_{j,u}$ und $M_{j,u} \in \mathfrak{R}_0$. Ferner ist $\sup\{E_{j,u} : j \in J, u \leqq \dim \mathfrak{H}\} = I$. Wir betrachten im folgenden nur mehr $E_{j,u}$ mit $E_{j,u} \neq 0$. Diese $E_{j,u}$ sind separabel, da $E_{j,u} \leqq E_j$, und von gleichmäßiger Vielfachheit $u$, da $E_{j,u} \leqq E_u$. Nach [5], S. 101, Theorem 4 gibt es also ein Orthogonalsystem $\{R^i_{j,u} : i \in I_u\}$ vom Typ $E_{j,u}$ und der Mächtigkeit $u$ ($I_u$ hat also die Mächtigkeit $u$), so daß $\sup\{R^i_{j,u} : i \in I_u\} = E_{j,u}$ ist. Zu jedem $i \in I_u$ gibt es ein $x^i_{j,u} \in \mathfrak{H}$ mit $Z(x^i_{j,u}) = R^i_{j,u}$ [zu $Z(x)$ s. S. 157]. In der Tat: Nach [5], S. 93, Theorem 3

gibt es ein $x^i_{j,u}$ im Wertebereich von $R^i_{j,u}$ mit $C(x^i_{j,u}) = E_{j,u}$ und nach [5], S. 92, Theorem 4 ist $Z(x^i_{j,u}) \leq R^i_{j,u}$. Da $R^i_{j,u}$ eine Reihe ist, gilt $Z(x^i_{j,u}) = C\left(Z(x^i_{j,u})\right) R^i_{j,u} = C(x^i_{j,u}) R^i_{j,u} = E_{j,u} R^i_{j,u} = R^i_{j,u}$.

Wir setzen $\mu^i_{j,u}(M) = \left(E(M)\, x^i_{j,u},\, x^i_{j,u}\right)$ für $M \in \mathfrak{R}_{j,u} = \{M : M \in \mathfrak{R}$ und $M \subset M_{j,u}\}$. Nach Lemma 1 ist $\mu^i_{j,u}$ ein endliches Maß über $\mathfrak{R}_{j,u}$ mit den Nullmengen $\mathfrak{R}_{j,u} \cap \mathfrak{n}$. $\mathfrak{L}^i_{j,u}$ sei der Hilbert-Raum der über $M_{j,u}$ quadratisch $\mu^i_{j,u}$-integrierbaren Funktionen. Nach [5], S. 95, Theorem 1 gibt es eine unitäre Abbildung $\overline{U}^i_{j,u}$ von $\mathfrak{L}^i_{j,u}$ auf $Z(x^i_{j,u})\,\mathfrak{H}$, so daß

$$(\overline{U}^i_{j,u})^{-1} E(M) \overline{U}^i_{j,u} f = \chi_M f \text{ für alle } M \in \mathfrak{R}_{j,u} \text{ und } f \in \mathfrak{L}^i_{j,u}. \tag{19}$$

Die Verengung von $\mu/\mathfrak{R}$ auf $\mathfrak{R}_{j,u}$ ist ebenfalls ein endliches Maß mit den Nullmengen $\mathfrak{R}_{j,u} \cap \mathfrak{n}$ [nach (17)]. Da beide Maße über $\mathfrak{R}_{j,u}$ die gleichen Nullmengen besitzen, können wir den Satz von RADON-NIKODYM anwenden und erhalten aus (19): Es gibt eine unitäre Abbildung $U^i_{j,u}$ des Hilbert-Raumes $\mathfrak{L}_{j,u}$ der über $M_{j,u}$ quadratisch $\mu$-integrierbaren Funktionen auf $Z(x^i_{j,u})\,\mathfrak{H}$ mit

$$(U^i_{j,u})^{-1} E(M)\, U^i_{j,u} f = \chi_M f \text{ für } M \in \mathfrak{R}_{j,u} \text{ und } f \in \mathfrak{L}_{j,u}. \tag{19}$$

Mit $\mathfrak{S}_{j,u}$ bezeichnen wir den Teilraum von $\mathfrak{S}$, der aus allen Vektorfeldern $f$ mit $f(x) = 0$ für $x \notin M_{j,u}$ besteht. $\mathfrak{S}_{j,u}$ ist unitär-isomorph zur $u$-fachen direkten Summe von $\mathfrak{L}_{j,u}$, da für jedes $k \in K_x = K_u$ $(x \in M_{j,u})$ der Teilraum aller $f(x) \in \mathfrak{S}_{j,u}$ mit $f(x) = f_k(x) e_k$ durch $f(x) \leftrightarrow f_k(x)$ unitär auf $\mathfrak{L}_{j,u}$ abgebildet wird und $K_u$ die Mächtigkeit $u$ hat. Wegen $\sup\{Z(x^i_{j,u}) : i \in I_u\} = \sup\{R^i_{j,u} : i \in I_u\} = E_{j,u}$ und $Z(x^i_{j,u})\, Z(x^{i'}_{j,u}) = R^i_{j,u} R^{i'}_{j,u} = 0$ ist $E_{j,u}\mathfrak{H}$ die direkte Summe der $Z(x^i_{j,u})\,\mathfrak{H}$ für $i \in I_u$. Setzt man nun die unitären Abbildungen $U^i_{j,u}$, $i \in I_u$, zusammen, so erhält man: Es gibt eine unitäre Abbildung $U_{j,u}$ von $\mathfrak{S}_{j,u}$ auf $E_{j,u}\mathfrak{H}$, so daß

$$U^{-1}_{j,u} E(M)\, U_{j,u} f = \chi_M f \text{ für } M \in \mathfrak{R}_{j,u} \text{ und } f \in \mathfrak{S}_{j,u}. \tag{19''}$$

Wegen $\sup\{E_{j,u} : j \in J,\ u \leq \dim \mathfrak{H}\} = I$ ist $\mathfrak{H}$ direkte Summe der $E_{j,u}\mathfrak{H}$ mit $E_{j,u} \neq 0$. Da andererseits $X_{\mathfrak{M}} - \bigcup\{M_{j,u} : j \in J,\ u \leq \dim \mathfrak{H}\} \in \mathfrak{n}$ [nach (7)] eine Nullmenge ist, ist $\mathfrak{S}$ direkte Summe der $\mathfrak{S}_{j,u}$. Wir können nun die unitären Abbildungen $U_{j,u}$ zu einer unitären Abbildung $U$ von $\mathfrak{S}$ auf $\mathfrak{H}$ zusammensetzen. Wir haben noch zu zeigen, daß

$$U^{-1} E(M)\, U f = \chi_M f = E'(M) f \text{ für alle } M \in \mathfrak{R} \text{ und alle } f \in \mathfrak{S}. \tag{20}$$

Beweis. Die Gl. (20) ist im Sinne des Hilbert-Raumes $\mathfrak{S}$ zu verstehen und nicht punktweise. Da $0 < \mu(M_{j,u}) < +\infty$ für alle $E_{j,u} \neq 0$, so nimmt ein $f \in \mathfrak{S}$ wegen (12) 3. nach Vernachlässigung einer geeigneten $\mu$-Nullmenge höchstens auf abzählbar vielen $M_{j,u}$ von Null verschiedene Werte an (beachte Lemma 9). $M_{j_\nu,u_\nu}$, $\nu = 1, 2, \ldots$ seien diese Mengen. Da $U$ alle $\mathfrak{S}_{j,u}$ auf $E(M_{j,u})\,\mathfrak{H}$ abbildet, steht $Uf$ senkrecht auf allen $E(M_{j,u})\,\mathfrak{H}$ mit $M_{j,u} \neq M_{j_\nu,u_\nu}$. Es gilt daher für $M \in \mathfrak{R}$: $U^{-1}E(M)\,Uf = U^{-1}E(M)\left(\sum_{\nu=1}^{\infty} E(M_{j_\nu,u_\nu})\right) Uf = U^{-1} \sum_{\nu=1}^{\infty} E(M)\, E(M_{j_\nu,u_\nu})\, Uf = \sum_{\nu=1}^{\infty} U^{-1}_{j_\nu,u_\nu} E(M \cap M_{j_\nu,u_\nu})\, U_{j_\nu,u_\nu} \chi_{M_{j_\nu,u_\nu}} f$ (nach der Definition von $U$) $= \chi_M \sum_{\nu=1}^{\infty} \chi_{M_{j_\nu,u_\nu}} f = \chi_M f$ (wegen der Wahl der $M_{j_\nu,u_\nu}$), w.z.b.w.

Wir fassen die Ergebnisse dieses Abschnittes zusammen:

**Satz 2.** *Ist $\mathfrak{H}$ ein Hilbert-Raum, $\mathfrak{M}$ eine ausgezeichnete Menge in $\mathfrak{H}$ und $E/\mathfrak{K}$ das Spektralmaß von Satz 1, dann gibt es ein direktes Integral $\mathfrak{S} = \int \mathfrak{H}_x d\mu$ und eine unitäre Abbildung $U$ von $\mathfrak{S}$ auf $\mathfrak{H}$, so daß das zu $\mathfrak{S}$ gehörige Spektralmaß $E'/\mathfrak{K}$ durch $U$ in $E/\mathfrak{K}$ übergeführt wird, d.h.* (20) *erfüllt ist.*

Damit haben wir das zu Beginn dieses Abschnittes gesteckte Ziel erreicht und eine Lösung des Umkehrproblems gefunden.

### 7. Zerlegung linearer Transformationen

Wir sind ausgegangen von einem Hilbert-Raum $\mathfrak{H}$ und einer ausgezeichneten Menge $\mathfrak{M}$. Die Lösung des Umkehrproblems erlaubt es uns $\mathfrak{H}$ als direktes Integral $\mathfrak{S} = \int \mathfrak{H}_x d\mu$ zu betrachten und $\mathfrak{M}$ als Wertebereich des zugehörigen Spektralmaßes. Für die Transformation aus $\mathfrak{M}$ ist damit eine übersichtliche Darstellung gewonnen. Man kann aber noch für eine weitere Klasse von Transformationen übersichtliche Darstellungen gewinnen.

Es sei im folgenden $\mathfrak{S} = \int \mathfrak{H}_x d\mu$ das im vorigen Abschnitt konstruierte direkte Integral und $E/\mathfrak{K}$ das zugehörige Spektralmaß, dessen Wertebereich eine ausgezeichnete Menge $\mathfrak{M}$ ist. Die $\mathfrak{H}_x$ sind Teilräume eines Hilbert-Raumes $\mathfrak{H}'$. Eine Funktion $\boldsymbol{A}$ über $X_{\mathfrak{M}}$, deren Werte beschränkte, lineare Transformationen in $\mathfrak{H}'$ sind, heißt ein zu $\mathfrak{S} = \int \mathfrak{H}_x d\mu$ *gehöriges Feld von Transformationen*, wenn gilt:

(21)
1. $\boldsymbol{A}(x)$ läßt $\mathfrak{H}_x$ invariant und $\boldsymbol{A}(x)h = 0$ für $h \perp \mathfrak{H}_x$, $x \in X_{\mathfrak{M}}$.
2. Aus $f \in \mathfrak{S}$ folgt $g \in \mathfrak{S}$, wobei $g(x) = \boldsymbol{A}(x) f(x)$ ist.

Eine Transformation $A$ in $\mathfrak{S}$ heißt *zerlegbar* in $\mathfrak{S}$, wenn es ein zu $\mathfrak{S}$ gehöriges Feld von Transformationen $\boldsymbol{A}$ gibt mit

(22) $$(Af)(x) = \boldsymbol{A}(x) f(x) \quad \mu\text{-fast überall für alle } f \in \mathfrak{S}.$$

Wir schreiben dafür $A \sim \boldsymbol{A}(x)$.

Ist $A \sim \boldsymbol{A}(x)$ und $B \sim \boldsymbol{B}(x)$, dann ist $\lambda A \sim \lambda \boldsymbol{A}(x)$, $A + B \sim \boldsymbol{A}(x) + \boldsymbol{B}(x)$ und $AB \sim \boldsymbol{A}(x)\, \boldsymbol{B}(x)$. Es gilt ferner:

(23) $$\text{Aus } A \sim \boldsymbol{A}(x) \text{ folgt } A \in \mathfrak{M}'.$$

Beweis. $(A \chi_M f)(x) = \boldsymbol{A}(x)\, \chi_M(x) f(x) = \chi_M(x)\, \boldsymbol{A}(x) f(x) = (\chi_M A f)(x)$ für alle $f \in \mathfrak{S}$. Also ist $AE = EA$ für alle $E \in \mathfrak{M}$, d.h. $A \in \mathfrak{M}'$, w. z. b. w.

*Lemma 10.* Ist $A \sim \boldsymbol{A}(x)$, dann ist $a_{i,k}(x) = (\boldsymbol{A}(x) e_k, e_i)$ $\mathfrak{K}$-meßbar für $i, k \in K$.

Beweis. Wir setzen $f^k_{j,u}(x) = e_k$ für $x \in M_{j,u}$ und sonst $= 0$ (zu $M_{j,u}$ siehe Ende des letzten Abschnittes). Wegen $f^k_{j,u} \in \mathfrak{S}$ gilt $\boldsymbol{A}(x) f^k_{j,u}(x) \in \mathfrak{S}$, also ist $a_{i,k}(x)$ auf $M_{j,u}$ $\mathfrak{K}$-meßbar für $k, i \in K_u$. Für $k \notin K_u$ oder $i \notin K_u$ ist $a_{i,k}(x) = 0$ auf $M_{j,u}$, also ebenfalls $\mathfrak{K}$-meßbar. Aus Lemma 9 folgt dann die Behauptung.

Ist $A \sim \boldsymbol{A}(x)$ und $B \sim \boldsymbol{B}(x)$, so folgt aus $A = B$ im allgemeinen nicht $\boldsymbol{A}(x) = \boldsymbol{B}(x)$ für alle $x \in X_{\mathfrak{M}}$ oder auch nur für $\mu$-fast alle $x \in X_{\mathfrak{M}}$. Es gilt vielmehr nur:

*Lemma 11.* Es sei $A \sim \boldsymbol{A}(x)$ und $B \sim \boldsymbol{B}(x)$; dann ist $A = B$ gleichwertig mit $(\boldsymbol{A}(x)e_k, e_i) = (\boldsymbol{B}(x)e_k, e_i)$ $\mu$-fast überall für alle $i, k \in K$.

Beweis. a) $A = B$: Dann ist $Af^k_{j,u} = Bf^k_{j,u}$ (vgl. Beweis von Lemma 10), also $(\boldsymbol{A}(x)e_k, e_i) = (\boldsymbol{B}(x)e_k, e_i)$ $\mu$-fast überall auf $M_{j,u}$ und daher nach Lemma 9 auch $\mu$-fast überall auf $X_{\mathfrak{M}}$.

b) Ist $(\boldsymbol{A}(x)e_k, e_i) = (\boldsymbol{B}(x)e_k, e_i)$ $\mu$-fast überall, dann ist $A(\chi_M f^k_{j,u}) = B(\chi_M f^k_{j,u})$ für $M \in \mathfrak{R}$. Da die lineare Hülle der $\chi_M f^k_{j,u}$ dicht in $\mathfrak{S}$ liegt und $A$ und $B$ beschränkte, lineare Transformationen in $\mathfrak{S}$ sind, ist $Af = Bf$ für alle $f \in \mathfrak{S}$, w. z. b. w.

Um die Eindeutigkeit der Zerlegung zu retten, führen wir die stetigen Zerlegungen ein. Wir nennen ein zu $\mathfrak{S}$ gehöriges Feld von Transformationen $\boldsymbol{A}$ *stetig*, wenn $(\boldsymbol{A}(x)f, g)$ eine stetige Funktion über $X_{\mathfrak{M}}$ ist für alle $f, g \in \mathfrak{H}'$. Eine Zerlegung einer Transformation $A \sim \boldsymbol{A}(x)$ nennen wir *stetig*, wenn $\boldsymbol{A}$ ein stetiges Feld von Transformationen ist; wir schreiben bei stetigen Zerlegungen $A \approx \boldsymbol{A}(x)$. Es gilt für $A \approx \boldsymbol{A}(x)$ und $B \approx \boldsymbol{B}(x)$:

(24) $A = B$ ist gleichwertig mit $\boldsymbol{A}(x) = \boldsymbol{B}(x)$ für alle $x \in X_{\mathfrak{M}}$.

Beweis. a) Aus $\boldsymbol{A}(x) = \boldsymbol{B}(x)$ für jedes $x \in X_{\mathfrak{M}}$ folgt offensichtlich $A = B$.

b) Aus $A = B$ folgt nach Lemma 11 $(\boldsymbol{A}(x)e_k, e_i) = (\boldsymbol{B}(x)e_k, e_i)$ $\mu$-fast überall. Aus der Stetigkeit folgt, daß diese Gleichung für alle $x \in X_{\mathfrak{M}}$ gilt (Lemma 7). Dann ist aber auch $\boldsymbol{A}(x)e_k = \boldsymbol{B}(x)e_k$ für alle $x \in X_{\mathfrak{M}}$ und alle $k \in K$ und damit auch $\boldsymbol{A}(x) = \boldsymbol{B}(x)$ für alle $x \in X_{\mathfrak{M}}$, w. z. b. w.

Im folgenden sollen stetige Zerlegungen genauer betrachtet werden. Ist $A \approx \boldsymbol{A}(x)$, so ist

(25) $$\sup\{||\boldsymbol{A}(x)|| : x \in X\} = ||A||$$ [8].

Beweis. Wir setzen $a_{i,k}(x) = (\boldsymbol{A}(x)e_k, e_i)$. $a_{i,k}(x)$ ist stetig auf $X_{\mathfrak{M}}$. Ferner ist

(26) $$||\boldsymbol{A}(x)||^2 = \sup\left\{\sum_{\mu=1}^{m}\Big|\sum_{\nu=1}^{n} a_{i_\mu,k_\nu}(x)\, y_\nu\Big|^2 : \sum_{\nu=1}^{n} y_\nu^2 = 1;\ n, m = 1, 2, \ldots\right\}.$$

Wir setzen vorübergehend $\sup\{||\boldsymbol{A}(x)|| : x \in X_{\mathfrak{M}}\} = C$ und zeigen $||A|| = C$.

a) $|Af|^2 = \int |\boldsymbol{A}(x)f(x)|^2 d\mu \leq C^2 \int |f(x)|^2 d\mu = C^2|f|^2$, also ist $||A|| \leq C$.

b) Angenommen es wäre $C > ||A||$, dann gibt es $m, n$ und ein $x_0$ mit $\sum_{\mu=1}^{m}\Big|\sum_{\nu=1}^{n} a_{i_\mu,k_\nu}(x_0)\, y_\nu\Big|^2 > ||A||^2$. Aus der Stetigkeit der $a_{i,k}$ folgt, daß dies sogar für alle $x$ einer geeigneten Umgebung $U(x_0)$ von $x_0$ gilt. Wir können annehmen, daß $U(x_0)$ ganz in einem $M_{j_0,u_0}$ liegt und $U(x_0) \in \mathfrak{R}_0$ ist. Ferner können wir annehmen, daß $k_\nu \in K_{u_0}$ für $\nu = 1, \ldots, n$ ist, denn für $k \notin K_{u_0}$ ist $a_{i,k}(x) = 0$ in $M_{j_0,u_0}$. Wir setzen $f = \chi_{U(x_0)} \sum_{\nu=1}^{n} y_\nu e_{k_\nu}$ mit $\sum_{\nu=1}^{n} y_\nu^2 = 1$, dann ist $f \in \mathfrak{S}$ und $||A||^2|f|^2 \geq |Af|^2 = \int |\boldsymbol{A}(x)f(x)|^2 d\mu = \int_{U(x_0)} \sum_{\mu=1}^{m}\Big|\sum_{\nu=1}^{n} a_{i_\mu,k_\nu}(x)\, y_\nu\Big|^2 d\mu > ||A||^2 \int_{U(x_0)} d\mu = ||A||^2|f|^2$ (Widerspruch).

[8] $||A|| = \sup\{|Af| : |f| = 1\}$.

*Lemma 12.* Ist $\boldsymbol{A}$ eine Funktion über $X_{\mathfrak{M}}$, deren Werte beschränkte, lineare Transformationen in $\mathfrak{H}'$ sind, so gibt es eine beschränkte, lineare Transformation $A$ in $\mathfrak{S}$ mit $A \approx \boldsymbol{A}(x)$ dann und nur dann, wenn

$$(27)\quad \begin{cases} 1.\ \boldsymbol{A}(x) \text{ den Teilraum } \mathfrak{H}_x \text{ invariant läßt und } \boldsymbol{A}(x)h = 0 \text{ für alle } h \perp \mathfrak{H}_x \\ \quad \text{gilt,} \\ 2.\ \boldsymbol{A}(x) \text{ schwach stetig in } X_{\mathfrak{M}} \text{ ist, d.h. } (\boldsymbol{A}(x)f, g) \text{ stetig für alle } f, g \in \mathfrak{H}' \\ \quad \text{ist, und} \\ 3.\ ||\boldsymbol{A}(x)|| \text{ beschränkt ist in } X_{\mathfrak{M}}. \end{cases}$$

Beweis. Nur dann: Aus $A \approx \boldsymbol{A}(x)$ folgt (27) 1. und 2. direkt aus der Definition und 3. aus (25).

Dann: a) $\boldsymbol{A}(x)$ erfülle nun (27). Zunächst haben wir zu zeigen, daß $\boldsymbol{A}(x)$ ein zu $\mathfrak{S}$ gehöriges Feld von Transformationen ist. (21) 1. und (27) 1. sind identisch. Wir haben noch (21) 2. zu bestätigen. Wir setzen $g(x) = \boldsymbol{A}(x)f(x)$ und zeigen: Aus $f \in \mathfrak{S}$ folgt $g \in \mathfrak{S}$. Wegen (27) 1. ist $g(x) \in \mathfrak{H}_x$. Ferner ist, wegen $f \in \mathfrak{S}$, $(f(x), e_k) = 0$ bis auf abzählbar viele Ausnahmen $k_1, k_2, \ldots$, wenn wir auf einer geeigneten $\mu$-Nullmenge $f(x)$ durch 0 ersetzen. Dann ist $(\boldsymbol{A}(x)f(x), e_i) = \sum_{\nu=1}^{\infty} a_{i,k_\nu}(x)\,(f(x), e_{k_\nu})$ $\mathfrak{R}$-meßbar, da die $a_{i,k}$ und die $(f(x), e_k)$ es sind, d.h. (12) 1. ist erfüllt. Aus $f \in \mathfrak{S}$ folgt noch, daß nach Abänderung auf einer geeigneten $\mu$-Nullmenge $f$ nur auf höchstens abzählbar vielen $M_{j,u}$ von Null verschiedene Werte annimmt. Auf $M_{j,u}$ sind aber bei festem $k$ nur abzählbar viele $a_{i,k}$ nicht identisch Null (Beweis unter c). Dann ist aber $(\boldsymbol{A}(x)f(x), e_i) = \sum_{\nu=1}^{\infty} a_{i,k_\nu}(x)\,(f(x), e_{k_\nu})$ nur für abzählbar viele $i \in K$ nicht identisch Null. $g$ erfüllt damit auch (12) 2. (12) 3. folgt aus (27) 3., denn $\int |\boldsymbol{A}(x)f(x)|^2 d\mu \leq (\sup\{||\boldsymbol{A}(x)||: x \in X_{\mathfrak{M}}\})^2 \int |f|^2 d\mu < +\infty$. Also ist $g \in \mathfrak{S}$ und $\boldsymbol{A}(x)$ ein zu $\mathfrak{S}$ gehöriges Feld von Transformationen.

b) Wegen (27) 2. ist $\boldsymbol{A}(x)$ ein stetiges Feld von Transformationen. Wir definieren nun eine lineare Transformation $A$ in $\mathfrak{S}$ durch $(Af)(x) = \boldsymbol{A}(x)f(x)$ für alle $f \in \mathfrak{S}$. Wegen $|Af|^2 = \int |\boldsymbol{A}(x)f(x)|^2 d\mu \leq (\sup\{||\boldsymbol{A}(x)||: x \in X_{\mathfrak{M}}\}|f|)^2$ ist $A$ beschränkt. Also ist $A \approx \boldsymbol{A}(x)$.

c) Wir haben noch die Behauptung über die $a_{i,k}$ zu beweisen. Es ist $(\boldsymbol{A}(x) f^k_{j,u}(x), e_i) = a_{i,k}(x)$ auf $M_{j,u}$ (zur Bezeichnung s. Beweis von Lemma 10). Es sei $K'_k = \{i: i \in K \text{ und } a_{i,k} \neq 0 \text{ auf } M_{j,u}\}$. Wegen der Stetigkeit der $a_{i,k}$ ist $i \in K'_k$ gleichwertig mit $\int_{M_{j,u}} |a_{i,k}(x)|^2 d\mu > 0$. Es ist nun $\sum_{i \in K} \int_{M_{j,u}} |a_{i,k}(x)|^2 d\mu \leq \sum_{i \in K} \int_{M_{j,u}} |(\boldsymbol{A}(x)\, f^k_{j,u}(x), e_i)|^2 d\mu \leq \sup\{||\boldsymbol{A}(x)||^2: x \in X_{\mathfrak{M}}\} \sum_{i \in K} \int |(f^k_{j,u}(x), e_i)|^2 d\mu = \sup\{||\boldsymbol{A}(x)||^2: x \in X_{\mathfrak{M}}\} \int |f^k_{j,u}(x)|^2 d\mu < +\infty$, da $f^k_{j,u} \in \mathfrak{S}$. Also können bei festem $k$ auf $M_{j,u}$ höchstens abzählbar viele $a_{i,k} \neq 0$ sein. Damit ist Lemma 12 vollständig bewiesen.

Nach Lemma 12 gibt es eine ein-eindeutige Abbildung von der Menge $\mathfrak{R}$ der stetig zerlegbaren Transformationen in $\mathfrak{S}$ auf die Menge $\tilde{\mathfrak{R}}$ der Felder

von Transformationen, die (27) erfüllen. Diese Abbildung hat noch folgende Eigenschaften: Ist $A \approx \boldsymbol{A}(x)$ und $B \approx \boldsymbol{B}(x)$, dann ist auch

$$A + B \approx \boldsymbol{A}(x) + \boldsymbol{B}(x), \quad \lambda A \approx \lambda \boldsymbol{A}(x) \text{ und } A^* \approx \boldsymbol{A}^*(x). \tag{28}$$

(Es gilt im allgemeinen nicht $AB \approx \boldsymbol{A}(x)\boldsymbol{B}(x)$, sondern nur $AB \sim \boldsymbol{A}(x)\boldsymbol{B}(x)$.)

Beweis. Wir haben nur noch $A^* \approx \boldsymbol{A}^*(x)$ zu zeigen. Die anderen Behauptungen sind offensichtlich richtig. Da $\boldsymbol{A}(x)$ (27) erfüllt, erfüllt auch $\boldsymbol{A}^*(x)$ (27). Es gibt also ein $\bar{A}$ mit $\bar{A} \approx \boldsymbol{A}^*(x)$. Weiter gilt für $f, g \in \mathfrak{H}$ $(Af, g) = \int (\boldsymbol{A}(x) f(x), g(x)) d\mu = \int (f(x), \boldsymbol{A}^*(x) g(x)) d\mu = (f, \bar{A}g)$, also ist $\bar{A} = A^*$, w. z. b. w.

Es ist $\mathfrak{R} = \mathfrak{M}'$. $\mathfrak{R} \subset \mathfrak{M}'$ folgt aus (23). Wir haben noch $\mathfrak{R} \supset \mathfrak{M}'$ zu zeigen. Zunächst gilt:

$$K_k = \{x: e_k \in \mathfrak{H}_x\} = \{x: k \in K_x\} = \{x: f_k(x) = 1\} \in \mathfrak{R}_0. \tag{29}$$

[Vgl. S. 167, zu (10) 3.]

Es sei nun $A \in \mathfrak{M}'$. Die Funktion $\varrho(M) = (\chi_M A f^k_{j,u}, f^i_{j,u}) - (A \chi_M f^k_{j,u}, f^i_{j,u})$ ist eine endliche total-additive Funktion auf $\mathfrak{R}_{j,u} = \{M: M \in \mathfrak{R} \text{ und } M \subset M_{j,u}\}$ und $\varrho(M) = 0$ für $M \in \mathfrak{R}_{j,u} \cap \mathfrak{n}$. Nach dem Satz von RADON-NIKODYM gibt es eine $\mathfrak{R}$-meßbare Funktion $a_{i,k}$ auf $M_{j,u}$ so, daß

$$\int_M a_{i,k}(x)\, d\mu = \int_M \left((A f^k_{j,u})(x), f^i_{j,u}(x)\right) d\mu \quad \text{für alle } M \in \mathfrak{R}_{j,u}. \tag{30}$$

Wir können $a_{i,k} \equiv 0$ auf $M_{j,u}$ annehmen, wenn entweder $i \notin K_u = K_x$ oder $k \notin K_u$ ist. Nach Lemma 7 und 4 können wir $a_{i,k}$ auf $X_{\mathfrak{M}}$ stetig annehmen. Wegen (29) bleibt $a_{i,k} \equiv 0$ für $i \notin K_x$ oder $k \notin K_x$. Es ist $\sum_{\mu=1}^{m} \left| \sum_{\nu=1}^{n} a_{i_\mu, k_\nu}(x)\, y_\nu \right|^2 \leqq \|A\|^2$ für $\sum_{\nu=1}^{n} y_\nu^2 = 1$ und alle $\{k_1, \ldots, k_n\}$, $\{i_1, \ldots, i_m\}$ und $m, n = 1, 2, \ldots$. Angenommen, dies wäre nicht der Fall, dann gäbe es wegen der Stetigkeit der $a_{i,k}$ ein $U(x_0)$, wie im Beweisteil b) von (26), mit $\sum_{\mu=1}^{m} \left| \sum_{\nu=1}^{n} a_{i_\mu, k_\nu}(x)\, y_\nu \right|^2 > \|A\|^2$ für alle $x \in U(x_0)$. Wir können wieder $U(x_0) \subset M_{j,u}$, $U(x_0) \in \mathfrak{R}_0$ und $k_\nu \in K_u$ annehmen. Wir setzen dann $f = \chi_{U(x_0)} \sum_{\nu=1}^{n} y_\nu e_{k_\nu}$. Aus (30) folgt $\left((A f^k_{j,u})(x), e_i\right) = a_{i,k}(x)$ $\mu$-fast überall in $M_{j,u}$.

$$|Af|^2 = \int |(Af)(x)|^2 d\mu \geqq \int \sum_{\mu=1}^{m} \left|\left((Af)(x), e_{i_\mu}\right)\right|^2 d\mu$$

$$= \int \sum_{\mu=1}^{m} \left( \sum_{\nu=1}^{n} y_\nu \left(A \chi_{U(x_0)} f^{k_\nu}_{j,u}\right)(x), e_i \right)^2 d\mu \quad \int \sum_{\mu=1}^{m} \sum_{\nu=1}^{n} \chi_{U(x_0)}(x)\, y_\nu a_{i_\mu, k_\nu}(x)^2 d\mu$$

$$= \int_{U(x_0)} \sum_{\mu=1}^{m} \left| \sum_{\nu=1}^{n} y_\nu a_{i_\mu, k_\nu}(x) \right|^2 d\mu > \|A\|^2 \cdot \int_{U(x_0)} d\mu = \|A\|^2 |f|^2 \quad \text{(Widerspruch)}$$

Es ist also

$$\sup \left\{ \sum_{i \in K} \left| \sum_{\nu=1}^{n} a_{i,k_\nu}(x)\, y_\nu \right|^2 \right\} \leqq \|A\|^2 \quad \text{für alle } x \in X_{\mathfrak{M}}. \tag{31}$$

Es gibt daher zu jedem $x \in X_{\mathfrak{M}}$ eine beschränkte, lineare Transformation $\boldsymbol{A}(x)$ in $\mathfrak{H}'$ mit

$$(\boldsymbol{A}(x)\, e_k, e_i) = a_{i,k}(x).$$

Jetzt zeigen wir, daß $\boldsymbol{A}(x)$ (27) erfüllt: (27) 1. folgt aus $a_{i,k}(x) = 0$ für $i \notin K_x$ oder $k \notin K_x$. (27) 3. folgt aus (31). Es ist $(\boldsymbol{A}(x) f, g)$ für $f, g \in \mathfrak{H}'$ stetig. Zunächst gilt dies für $f = e_k$ und $g = e_i$, $i, k \in K$, also auch für endliche Linearkombinationen der $e_k$. Wegen (31) ist $\|\boldsymbol{A}(x)\| \leq \|A\|$ für alle $x \in X_{\mathfrak{M}}$. Es seien $\{f_\nu\}$ und $\{g_\nu\}$ Folgen von Linearkombinationen der $e_k$ mit $f = \lim_{\nu \to \infty} f_\nu$ und $g = \lim_{\nu \to \infty} g_\nu$. Wegen $|(\boldsymbol{A}(x) f_\nu, g_\nu) - (\boldsymbol{A}(x) f, g)| \leq \|A\| \|f_\nu - f\| |g_\nu| + \|A\| \|f\| |g - g_\nu|$ konvergiert $(\boldsymbol{A}(x) f_\nu, g_\nu)$ gleichmäßig gegen $(A(x) f, g)$, also ist $(A(x) f, g)$ stetig. (27) ist also erfüllt.

Es gibt nach Lemma 12 eine Transformation $\bar{A}$ in $\mathfrak{S}$ mit $\bar{A} \approx \boldsymbol{A}(x)$. Im folgenden sei $M \in \mathfrak{R}_{j,u}$ und $M' \in \mathfrak{R}_{j',u'}$. Da $A \in \mathfrak{M}'$ ist, gilt: $(A \chi_M f^k_{j,u}, \chi_{M'} f^i_{j',u'}) = \int_{M \cap M'} \left( (A f^k_{j,u})(x), f^i_{j',u'}(x) \right) d\mu = 0$ für $(j,u) \neq (j',u')$, da $M \cap M' \subset M_{j,u} \cap M_{j',u'} = \emptyset$ ist, und $= \int_{M \cap M'} a_{i,k}(x)\, d\mu$ für $(j,u) = (j',u')$ nach (30). Es gilt aber auch $(\bar{A} \chi_M f^k_{j,u}, \chi_{M'} f^i_{j',u'}) = \int_{M \cap M'} (\boldsymbol{A}(x) f^k_{j,u}(x), f^i_{j',u'}(x))\, d\mu = 0$ für $(j,u) \neq (j',u')$ und $= \int_{M \cap M'} (\boldsymbol{A}(x) e_k, e_i)\, d\mu = \int_{M \cap M'} a_{i,k}(x)\, d\mu$ für $(j,u) = (j',u')$. Also gilt $(A \chi_M f_{j,u}, \chi_{M'} f^i_{j',u'}) = (\bar{A} \chi_M f^k_{j,u}, \chi_M f^i_{j',u'})$. Da die Linearkombinationen der $\chi_M f^k_{j,u}$ dicht in $\mathfrak{S}$ liegen, gilt $(A f, g) = (\bar{A} f, g)$ für alle $f, g \in \mathfrak{S}$ und damit ist $\bar{A} = A$ bewiesen. Also ist $A \approx \boldsymbol{A}(x)$ und $A \in \mathfrak{R}$. Es ist also $\mathfrak{R} > \mathfrak{M}'$, w. z. b. w.

Wir haben damit den folgenden Satz bewiesen:

**Satz 3.** *Durch $A \approx \boldsymbol{A}(x)$ wird eine ein-eindeutige Abbildung von $\mathfrak{M}'$ auf die Menge der Felder von Transformationen, die (27) erfüllen, definiert. Für diese Abbildung gilt:*

*1. Aus $A \approx \boldsymbol{A}(x)$ und $B \approx \boldsymbol{B}(x)$ folgt $A + B \approx \boldsymbol{A}(x) + \boldsymbol{B}(x)$ und $\lambda A \approx \lambda \boldsymbol{A}(x)$ und $A^* \approx \boldsymbol{A}^*(x)$.*

*2. $\|A\| = \sup\{\|\boldsymbol{A}(x)\| : x \in X_{\mathfrak{M}}\}$.*

Mit $\boldsymbol{I}(x)$ bezeichnen wir die Projektion von $\mathfrak{H}'$ auf $\mathfrak{H}_x$. Es ist

$$I \approx \boldsymbol{I}(x). \tag{33}$$

Beweis. $I \sim \boldsymbol{I}(x)$ ist klar. Wir haben nur noch die schwache Stetigkeit von $\boldsymbol{I}(x)$ zu zeigen. Die Stetigkeit von $(\boldsymbol{I}(x) e_k, e_i)$ folgt aus (29). Man erhält dann wegen $\|\boldsymbol{I}(x)\| = 1$ genau wie beim letzten Beweis die Stetigkeit von $(\boldsymbol{I}(x) f, g)$ für alle $f, g \in \mathfrak{H}'$.

Ist $A \in \mathfrak{M}'$ und $A \approx \boldsymbol{A}(x)$ und $A'(x)$ die Verengung von $\boldsymbol{A}(x)$ auf $\mathfrak{H}_x$, dann gilt für die Abbildung $A \to A'(x)$:

*Korollar zu Satz 3. Für jedes $x \in X_{\mathfrak{M}}$ ist $A \to A'(x)$ eine eindeutige Abbildung von $\mathfrak{M}'$ auf die Menge $\mathfrak{A}_x$ aller beschränkten, linearen Transformationen in $\mathfrak{H}_x$ mit den Eigenschaften:*

$$\begin{cases} 1.\ (A+B)'(x) = A'(x) + B'(x), \quad (\lambda A)'(x) = \lambda A'(x), \quad (A^*)'(x) \\ \quad\ = (A'(x))^*. \\ 2.\ \|A'(x)\| \leq \|A\|. \end{cases} \tag{34}$$

Beweis. Wir haben nur noch zu zeigen, daß es sich um eine Abbildung auf $\mathfrak{A}_x$ handelt. Ist $A' \in \mathfrak{A}_{x_0}$ und $A''$ die Operation in $\mathfrak{H}'$, die auf $\mathfrak{H}_{x_0}$ mit $A'$ übereinstimmt und auf $\mathfrak{H}_{x_0}^{\perp}$ identisch Null ist, dann ist $\boldsymbol{I}(x) A'' \boldsymbol{I}(x) = \boldsymbol{A}(x)$ ein Feld von Transformationen, das (27) erfüllt. (27) 1. und 3. sind offensichtlich erfüllt. $(\boldsymbol{I}(x) A'' \boldsymbol{I}(x) e_k, e_i) = (A'' \boldsymbol{I}(x) e_k, \boldsymbol{I}(x) e_i) = \chi_{K_k}(x) \chi_{K_i}(x) (A'' e_k, e_i)$. Dieser Ausdruck ist wegen (29) stetig. Man zeigt wieder wie oben, daß auch $(\boldsymbol{I}(x) A'' \boldsymbol{I}(x) f, g)$ stetig ist für alle $f, g \in \mathfrak{H}'$. Da (27) erfüllt ist, gibt es ein $A$ mit $A \approx \boldsymbol{I}(x) A'' \boldsymbol{I}(x)$. Also ist $\boldsymbol{A}(x_0) = \boldsymbol{I}(x_0) A'' \boldsymbol{I}(x_0) = A''$ und $A'(x_0) = A'$, w. z. b. w.

Zu diesem Abschnitt vergleiche man auch [3], S. 115 ff., insbesondere die Formeln (218) bis (220), dort stehen die Ergebnisse von Satz 3.1. Diese Ergebnisse werden in [3] auf einem anderen Weg abgeleitet.

## 8. Die Transformationen aus $\mathfrak{M}''$

$\alpha$ sei eine endliche, stetige Funktion über $X_{\mathfrak{M}}$. Dann erfüllt $\alpha(x) \boldsymbol{I}(x)$ (27) und es gibt daher ein $A \in \mathfrak{M}'$ mit $A \approx \alpha(x) \boldsymbol{I}(x)$.

**Satz 4.** *$A \approx \alpha(x) \boldsymbol{I}(x)$ ist gleichwertig mit $A \in \mathfrak{M}''$. Die ein-eindeutige Abbildung $A \approx \alpha(x) \boldsymbol{I}(x) \leftrightarrow \alpha$ von $\mathfrak{M}''$ auf die Menge $S$ aller stetigen Funktionen über $X_{\mathfrak{M}}$ hat folgende Eigenschaften:*

$$(35) \quad \begin{cases} 1. \text{ Aus } A \leftrightarrow \alpha \text{ und } B \leftrightarrow \beta \text{ folgt } A + B \leftrightarrow \alpha + \beta,\ A^* \leftrightarrow \bar{\alpha}^{9}),\ AB \leftrightarrow \alpha\beta, \\ \quad \lambda A \leftrightarrow \lambda \alpha. \\ 2.\ \|A\| = \sup\{|\alpha(x)| : x \in X_{\mathfrak{M}}\}. \end{cases}$$

Beweis. a) $A \approx \alpha(x) \boldsymbol{I}(x)$ und $B \approx \boldsymbol{B}(x) \in \mathfrak{M}'$; dann ist $AB \sim \alpha(x) \boldsymbol{B}(x) = \boldsymbol{B}(x) \alpha(x) \boldsymbol{I}(x) \sim BA$. Also ist $AB = BA$ und damit $A \in \mathfrak{M}''$.

b) $A \in \mathfrak{M}'' \subset \mathfrak{M}'$. Es ist also $A \approx \boldsymbol{A}(x)$ und $AB = BA$ für alle $B \in \mathfrak{M}'$.

$\alpha$) Es ist $(\boldsymbol{A}(x) e_i, e_k) = a_{i,k}(x) = 0$ für $i \neq k$. Angenommen, es wäre $a_{i_0,k_0}(x) \neq 0$, dann gibt es eine Umgebung $U(x_0)$ von $x_0$ mit $a_{i_0,k_0}(x) \neq 0$ für $x \in U(x_0)$. Wir können $U(x_0) < M_{j_0,u_0}$ und $U(x_0) \in \mathfrak{R}_0$ annehmen. Es ist $i_0, k_0 \in K_{u_0}$, da sonst $a_{i_0,k_0}(x_0) = 0$ wäre. Wir definieren $\boldsymbol{B}(x)$ für $x \notin U(x_0)$ durch $\boldsymbol{B}(x) = 0$ und für $x \in U(x_0)$ durch $\boldsymbol{B}(x) e_k = 0$ für $k \neq k_0$ und $\boldsymbol{B}(x) e_{k_0} = e_{k_0}$. $\boldsymbol{B}(x)$ erfüllt (27); es gibt also ein $B \in \mathfrak{M}'$ mit $B \approx \boldsymbol{B}(x)$. Es ist einerseits $((AB f^{k_0}_{j_0,u_0})(x), e_{i_0}) = ((A \chi_{U(x_0)} f^{k_0}_{j_0,u_0})(x), e_{i_0}) = \chi_{U(x_0)}(x) a_{i_0,k_0}(x)$ für $\mu$-fast alle $x \in X_{\mathfrak{M}}$, andererseits ist $((BA f^{k_0}_{j_0,k_0})(x), e_{i_0}) = (g(x) e_{k_0}, e_{i_0}) = 0$ $\mu$-fast überall in $X_{\mathfrak{M}}$. Es ist daher $a_{i_0,k_0}(x) = 0$ für $x \in U(x_0)$ (Widerspruch).

$\beta$) $a_{i,i}(x) = a_{k,k}(x)$ für alle $i, k \in K_x$. Angenommen, es wäre $a_{i_0,i_0}(x_0) \neq a_{k_0,k_0}(x_0)$ mit $i_0, k_0 \in K_{x_0}$. Dann gibt es wegen der Stetigkeit von $f_{k_0}$ und $f_{i_0}$ [vgl. (18)] und von $a_{i_0,i_0}$ und $a_{k_0,k_0}$ eine ganze Umgebung $U(x_0)$ mit $a_{i_0,i_0}(x) \neq a_{k_0,k_0}(x)$ und $i_0, k_0 \in K_x$ für alle $x \in U(x_0)$. Wir können wieder annehmen, daß $U(x_0) \in \mathfrak{R}_0$ und $U(x_0) < M_{j_0,u_0}$ ist. Wir definieren $B'$ durch $B' e_i = 0$ für $i \neq i_0$ und $i \neq k_0$ und $B'(e_{i_0} - e_{k_0}) = 0$ und $B'(e_{i_0} + e_{k_0}) = e_{i_0} + e_{k_0}$. Es sei $\boldsymbol{B}(x) = \boldsymbol{I}(x) B' \boldsymbol{I}(x)$. Da $U(x_0) < M_{j_0,u_0}$ ist, ist $i_0, k_0 \in K_x = K_{u_0}$ für alle $x \in M_{j_0,u_0}$. Dann ist $\boldsymbol{B}(x) = B'$ auf $M_{j_0,u_0}$. Es gilt also einerseits $(AB(f^{k_0}_{j_0,u_0} + f^{i_0}_{j_0,u_0}))(x) =$

[9]) $\bar{\alpha}$ ist die Funktion $\bar{\alpha}(x) = \overline{\alpha(x)}$ = Konjugierte zu $\alpha(x)$.

$\left(A\left(f_{j_0,u_0}^{k_0}+f_{j_0,u_0}^{i_0}\right)\right)(x)=\chi_{M_{i_0,u_0}}(x)\left(a_{i_0,i_0}(x)e_{i_0}+a_{k_0,k_0}(x)e_{k_0}\right)$ $\mu$-fast überall und andererseits $\left(BA\left(f_{j_0,u_0}^{k_0}+f_{j_0,u_0}^{i_0}\right)\right)(x)=\boldsymbol{B}(x)\left(a_{i_0,i_0}(x)e_{i_0}+a_{k_0,k_0}(x)e_{k_0}\right)\chi_{M_{j_0,u_0}}(x)=\chi_{M_{j_0,u_0}}(x)\,\frac{1}{2}\left(a_{i_0,i_0}(x)+a_{k_0,k_0}(x)\right)(e_{k_0}+e_{i_0})$ $\mu$-fast überall. Also ist $a_{i_0,i_0}(x)=a_{k_0,k_0}(x)$ in $M_{j_0,u_0}$ (Widerspruch). Wählt man insbesondere $i_0\in K_{u_0}$ mit $u_0=\min\{u\colon E_u\neq 0\}$, dann gilt $i_0\in K_x$ für alle $x\in X_{\mathfrak{M}}$ und daher $A\approx a_{i_0,i_0}(x)\boldsymbol{I}(x)$, also $A\approx\alpha(x)\boldsymbol{I}(x)$ mit $\alpha(x)=a_{i_0,i_0}(x)$, d.h. $\alpha(x)$ ist stetig über $X_{\mathfrak{M}}$.

c) Aus Satz 3 folgt (35) bis auf $AB\leftrightarrow\alpha\beta$. Es gilt aber $AB\sim(\alpha\beta)(x)\boldsymbol{I}(x)$ und wegen der Stetigkeit von $\alpha\beta$ ist dann $AB\approx(\alpha\beta)(x)\boldsymbol{I}(x)$, d.h. $AB\leftrightarrow\alpha\beta$, w. z. b. w.

## 9. Kommutative Ringe

Wir wollen nun einige Anwendungen unserer bisherigen Ergebnisse betrachten. Zunächst bestätigen wir die in (3) aufgestellte Behauptung.

**Satz 5.** *Eine Menge $\mathfrak{M}$ von Projektionen in $\mathfrak{H}$ ist dann und nur dann ausgezeichnet, wenn $\mathfrak{M}''$ ein kommutativer Ring mit*

$$\mathfrak{M}''^{P}=\mathfrak{M}$$

*ist.*

Beweis. Dann: Siehe Bemerkung vor (3).

Nur dann: Wir können $\mathfrak{H}$ durch ein direktes Integral $\mathfrak{S}=\int\mathfrak{H}_x d\mu$ und $\mathfrak{M}$ durch den Wertebereich des zugehörigen Spektralmaßes ersetzen (Satz 2). $\mathfrak{M}''^{P}\supset\mathfrak{M}$ folgt bereits aus $\mathfrak{M}''\supset\mathfrak{M}$. Es sei nun $E\in\mathfrak{M}''^{P}$, dann ist nach Satz 4 $E\approx\alpha(x)\boldsymbol{I}(x)$ und $\alpha^2(x)=\alpha(x)$, da $E^2=E$. Also ist $\alpha(x)=1$ oder $=0$. Wegen der Stetigkeit ist damit $\alpha=\chi_{\mathfrak{M}}$ für ein $M\in\mathfrak{R}_0$. Also ist $E=E(M)$, d.h. $E\in\mathfrak{M}$. Daß $\mathfrak{M}''$ kommutativ ist, folgt ohne weiteres aus der Kommutativität von $\mathfrak{M}$.

Im folgenden benötigen wir noch die Beziehung

$$(\mathfrak{R}^{P})''=\mathfrak{R} \tag{36}$$

für Ringe. Zum Beweis von (36) brauchen wir einen Satz, der sicherstellt, daß sich jede selbstadjungierte Transformation „beliebig genau" durch die Projektionen auf ihre invarianten Teilräume darstellen läßt. Ein solcher Satz ist der Spektralsatz für selbstadjungierte Transformationen.

*Lemma 13.* Für einen Ring $\mathfrak{R}$ gilt $(\mathfrak{R}^{P})''=\mathfrak{R}$ (vgl. [9], S. 392).

Beweis. a) Aus $\mathfrak{R}^{P}\subset\mathfrak{R}$ folgt $(\mathfrak{R}^{P})''\subset\mathfrak{R}''=\mathfrak{R}$.

b) Es sei $A\in\mathfrak{R}$ und $A\notin(\mathfrak{R}^{P})''$. Da $A=\frac{1}{2}(A^*+A)+\frac{1}{2i}(iA-iA^*)$ und $(A+A^*)\in\mathfrak{R}$ und $(iA-iA)\in\mathfrak{R}$, aber nicht beide in $(\mathfrak{R}^{P})''$, so können wir annehmen, daß $A$ selbstadjungiert ist. Der Spektralsatz sagt dann aus, daß $A=\int\lambda\,dE_\lambda$ für eine geeignete Zerlegung der Einheit $\{E_\lambda\}$ ist und daß $E_\lambda\in\{A\}''$ (vgl. etwa [7], S. 25). Aus $A\in\mathfrak{R}$ folgt $\{A\}''\subset\mathfrak{R}''=\mathfrak{R}$, also $E_\lambda\in\mathfrak{R}$ für $-\infty<\lambda<+\infty$ und damit $E_\lambda\in(\mathfrak{R}^{P})''$. Als Ring ist $(\mathfrak{R}^{P})''$ schwach abgeschlossen (vgl. [9]). $A$ liegt nach dem Spektralsatz in der schwachen Hülle der Linearkombinationen der $E_\lambda$, also auch in $(\mathfrak{R}^{P})''$ (Widerspruch).

**Satz 6.** *Jeder kommutative Ring $\mathfrak{R}$ ist isomorph der Menge $S$ aller stetigen Funktionen über $X_{\mathfrak{M}}$ mit $\mathfrak{M}=\mathfrak{R}^{P}$. Im einzelnen gilt:*

1. *Aus* $A \leftrightarrow \alpha$ *und* $B \leftrightarrow \beta$ *folgt* $A+B \leftrightarrow \alpha+\beta$, $\lambda A \leftrightarrow \lambda\alpha$, $A^* \leftrightarrow \bar{\alpha}$ *und* $AB \leftrightarrow \alpha\beta$.

2. $||A|| = \sup\{|\alpha(x)| : x \in X_{\mathfrak{M}}\}$.

Beweis. Nach Satz 4 gilt dies für alle $A \in \mathfrak{M}'' = (\mathfrak{R}^P)''$ und nach Lemma 13 ist $(\mathfrak{R}^P)'' = \mathfrak{R}$, w. z. b. w.

Wir haben damit einen bekannten Satz (vgl. z.B. [3], S. 70) für den Spezialfall von Ringen in Hilbert-Räumen bewiesen.

Ist $\mathfrak{R}$ ein kommutativer Ring und $\mathfrak{R}^A$ die Menge aller selbstadjungierten Transformationen in $\mathfrak{R}$, dann ist $\mathfrak{R}^A$ bei der „natürlichen" teilweisen Ordnung ein vollständiger Vektorverband. Wir geben zunächst der Vollständigkeit halber die Definitionen für Vektorverbände und vollständige Vektorverbände an. Ein *Vektorverein* $R$ ist ein Vektorraum über dem Körper der reellen Zahlen, in dem eine teilweise Ordnung ($\geqq$) definiert ist, die folgende Bedingungen erfüllt:

1. Aus $a \geqq b$ folgt $a+c \geqq b+c$ für alle $c \in R$ und

2. aus $a \geqq b$ und $\lambda \geqq 0$ folgt $\lambda a \geqq \lambda b$.

Ein Vektorverein heißt *Vektorverband* (Rieszscher Raum), falls er ein Verband bezüglich seiner teilweisen Ordnung ist. Ein Vektorverband heißt *vollständig*, wenn gilt: Ist $J$ eine beliebige Menge und jedem $j \in J$ ein $a_j \in R$ zugeordnet und existiert ein $h \in R$ mit $a_j \leqq h$ für alle $j \in J$, dann existiert auch das Supremum der $a_j$ in $R$.

**Satz 7.** *Ist* $\mathfrak{R}$ *ein kommutativer Ring von Transformationen in* $\mathfrak{H}$ *und* $\mathfrak{R}^A$ *die Menge der selbstadjungierten Transformationen aus* $\mathfrak{R}$, *und führt man in* $\mathfrak{R}^A$ *eine teilweise Ordnung durch* $A \geqq B$ *dann und nur dann, wenn* $(Af, f) \geqq (Bf, f)$ *für alle* $f \in \mathfrak{H}$, *dann ist* $\mathfrak{R}^A$ *ein vollständiger Vektorverband.*

Beweis. 1. Nach Satz 6 ist $\mathfrak{R}^A$ isomorph zur Menge $S^R$ der endlichen, stetigen und reellen Funktionen über $X_{\mathfrak{M}}$ mit $\mathfrak{M} = \mathfrak{R}^P$. Es sei $A \leftrightarrow \alpha$ und $B \leftrightarrow \beta$, dann ist $A \geqq B$ gleichwertig mit $\alpha \geqq \beta$, d.h. $\alpha(x) \geqq \beta(x)$ für alle $x \in X_{\mathfrak{M}}$. Aus $\alpha \geqq \beta$ folgt $(Af, f) = \int (\alpha(x) f(x), f(x))\, d\mu = \int \alpha(x) |f(x)|^2 d\mu \geqq \int \beta(x) |f(x)|^2 d\mu = (Bf, f)$. Angenommen, es wäre $A \geqq B$ und $\alpha(x_0) < \beta(x_0)$ für ein $x_0 \in X_{\mathfrak{M}}$, dann gibt es eine Umgebung $U(x_0)$ von $x_0$ mit $\alpha(x) < \beta(x)$ für alle $x \in U(x_0)$. Wir können wieder $U(x_0) \subset M_{j_0, u_0}$ und $U(x_0) \in \mathfrak{R}_0$ annehmen. Es sei $k_0 \in K_{u_0}$. Dann ist $f - \chi_{U(x_0)} e_{k_0} \in \mathfrak{H}$ und es gilt $(Af, f) = \int \alpha(x) |f(x)|^2 d\mu < \int \beta(x) |f(x)|^2 d\mu = (Bf, f)$ (Widerspruch zu $A \geqq B$).

2. $\mathfrak{R}^A$ ist also isomorph zum Vektorverband $S^R$. Wir haben nur noch zu zeigen, daß $S^R$ ein vollständiger Vektorverband ist. Dies folgt so (vgl. [8], S. 214): Ist $\{\varphi_j : j \in J\}$ ein System von Funktionen aus $S^R$ mit $\varphi_j \leqq \varphi_0$ und $\varphi_0 \in S^R$, dann setzen wir $M_\alpha = \bigcup_{j \in J} \{x : \varphi_j(x) > \alpha\}$. $M_\alpha$ ist offen, da die $\varphi_j$ stetig sind; ferner ist $M_\alpha = X_{\mathfrak{M}}$, falls $\alpha < \inf\{\varphi_{j_0}(x) : x \in X_{\mathfrak{M}}\}$ für irgendein $j_0 \in J$. Wir setzen $\varphi(x) = \sup\{\alpha : x \in \overline{M}_\alpha\}$ und zeigen $\varphi(x) = \sup\{\varphi_j : j \in J\}$. $\overline{M}_\alpha$ ist offen und abgeschlossen, daher ist wegen $\{x : \varphi(x) \geqq \alpha\} = \bigcap_{u=1}^{\infty} \overline{M}_{\alpha - \frac{1}{n}}$ und $\{x : \varphi(x) > \alpha\} = \bigcup_{u=1}^{\infty} \overline{M}_{\alpha + \frac{1}{n}}$ $\varphi(x)$ stetig. Ist $\varphi' \geqq \varphi_j$ für alle $j \in J$ und $\varphi' \in S^R$,

dann gilt $\varphi(x) = \sup\{\alpha: x \in \overline{M}_\alpha\} \leq \sup\{\alpha: x \in \overline{M}'_\alpha\} \leq \varphi'(x)$, dabei ist $M'_\alpha = \{x: \varphi'(x) > \alpha\}$ und wegen der Stetigkeit $\varphi'(x) \geqq \alpha$ für $x \in \overline{M}'_\alpha$. Insbesondere ist $\varphi_0 \geqq \varphi$. Ferner ist $\varphi \geqq \varphi_j$ für alle $j \in J$, denn $\varphi_j(x) > \alpha$ hat $x \in \overline{M}_\alpha$ und damit auch $\varphi(x) \geqq \alpha$ zur Folge. Insbesondere ist $\varphi \geqq \varphi_{j_0}$. Wegen $\varphi_0 \geqq \varphi \geqq \varphi_j$ ist $\varphi$ endlich, also aus $S^K$ und nach dem Bewiesenen ist $\varphi = \sup\{\varphi_j: j \in J\}$. Damit ist Satz 7 bewiesen.

Wir nennen zwei Ringe $\mathfrak{R}_1$ und $\mathfrak{R}_2$ *isomorph*, wenn es eine ein-eindeutige Abbildung von $\mathfrak{R}_1$ auf $\mathfrak{R}_2$ gibt und aus $A_1 \leftrightarrow A_2$, $B_1 \leftrightarrow B_2$ folgt $\lambda A_1 + \mu B_1 \leftrightarrow \lambda A_2 + \mu B_2$ und $A_1 B_1 \leftrightarrow A_2 B_2$.

**Satz 8.** *Zwei kommutative Ringe $\mathfrak{R}_1$ und $\mathfrak{R}_2$ sind dann und nur dann isomorph, wenn $X_{\mathfrak{R}_1^P}$ und $X_{\mathfrak{R}_2^P}$ homöomorph sind. Für eine Isomorphie zwischen $\mathfrak{R}_1$ und $\mathfrak{R}_2$ gilt noch: Aus $A_1 \leftrightarrow A_2$ folgt $A^* \leftrightarrow A^*$ und $||A_1|| = ||A_2||$.*

Beweis. Wir setzen $\mathfrak{R}_1^P = \mathfrak{M}_1$ und $\mathfrak{R}_2^P = \mathfrak{M}_2$. Es genügt nach Satz 6 die Ringe der stetigen Funktionen $S_1$ und $S_2$ über $X_{\mathfrak{M}_1}$ bzw. $X_{\mathfrak{M}_2}$ zu betrachten.

a) Wenn $X_{\mathfrak{M}_1}$ und $X_{\mathfrak{M}_2}$ homöomorph sind, ist selbstverständlich $S_1$ isomorph zu $S_2$.

b) $S_1$ und $S_2$ seien isomorph. Jedem maximalen Ideal $\mathfrak{p}_1$ bzw. $\mathfrak{p}_2$ in $S_1$ bzw. $S_2$ entspricht genau ein Punkt $x_1 \in X_{\mathfrak{M}_1}$ bzw. $x_2 \in X_{\mathfrak{M}_2}$ mit $\mathfrak{p}_i = \{\alpha: \alpha \in S_i$ und $\alpha(x_i) = 0\}$, $i = 1, 2$ (vgl. [6], S. 54). Wir erhalten damit eine ein-eindeutige Abbildung $x_1 \leftrightarrow x_2$ von $X_{\mathfrak{M}_1}$ auf $X_{\mathfrak{M}_2}$. Diese Abbildung führt offene Mengen in offene Mengen über, ist also eine Homöomorphie. In der Tat: Jede offene Menge ist Vereinigung von gleichzeitig offenen und abgeschlossenen Mengen. Es genügt daher zu zeigen, daß diese Mengen ineinander übergehen. $M_1$ sei gleichzeitig offen und abgeschlossen in $X_{\mathfrak{M}_1}$ und $\chi_{M_1} \leftrightarrow \beta$. Da $\chi_{M_1}^2 - \chi_{M_1} = 0$, ist $\beta^2 - \beta = 0$. Also ist auch $\beta$ eine charakteristische Funktion $\chi_{M_2}$, und da $\beta$ stetig ist, ist auch $M_2$ offen und abgeschlossen. Die Menge der maximalen Ideale $\mathfrak{p}_1$ mit $\mathfrak{p}_1 \ni \chi_{M_1}$ geht über in die Menge der maximalen Ideale $\mathfrak{p}_2$ mit $\chi_{M_2} \notin \mathfrak{p}_2$, d.h. $M_1$ geht in $M_2$ über.

c) Gilt bei der Isomorphie $\alpha_1 \leftrightarrow \alpha_2$ und bei der zugehörigen Homöomorphie $x_1 \leftrightarrow x_2$, dann ist $\alpha_1(x_1) = \alpha_2(x_2)$. Nach b) gilt $\chi_{X_{\mathfrak{M}_1}} \leftrightarrow \chi_{X_{\mathfrak{M}_2}}$ und da $\alpha_1 - \alpha_1(x_1) \cdot \chi_{X_{\mathfrak{M}_1}}$ in $x_1$ Null ist, ist also auch $\alpha_2 - \alpha_1(x_1)\chi_{X_{\mathfrak{M}_2}}$ Null in $x_2$, d.h. $\alpha_1(x_1) = \alpha_2(x_2)$. Hieraus folgen ohne weiteres die restlichen Behauptungen von Satz 8.

Aus Satz 8 und der Bemerkung am Ende des 3. Abschnittes folgt: Für die Isomorphie zweier kommutativer Ringe $\mathfrak{R}_1$ und $\mathfrak{R}$ ist $\alpha(\mathfrak{R}_1^P) = \alpha(\mathfrak{R}_2^P)$ und $\gamma(\mathfrak{R}_1^P) = \gamma(\mathfrak{R}_2^P)$ notwendig und falls $\mathfrak{R}_1$ und $\mathfrak{R}_2$ Ringe von Transformationen in separablen Hilbert-Räumen sind, sogar hinreichend. In einem separablen Hilbert-Raum ist ein kommutativer Ring also entweder zu einem Ring $\mathfrak{R}_a$ aller beschränkten reellen Funktionen über einer endlichen oder abzählbaren Menge isomorph oder zu einem Ring $\mathfrak{R}_\mathfrak{T}$ aller stetigen Funktionen über dem topologischen Raum $X_\mathfrak{T}$ [= der topologische Raum, der zum Verband $\mathfrak{T}$ gehört (vgl. Ende des 2. Abschnittes)] oder zu einer direkten Summe eines Ringes $\mathfrak{R}_a$ mit dem Ring $\mathfrak{R}_\mathfrak{T}$.

Eine Abbildung eines Ringes $\mathfrak{R}_1$ auf einen Ring $\mathfrak{R}_2$ heißt Homomorphie, wenn aus $A_1 \to A_2$ und $B_1 \to B_2$ folgt $A_1 + B_1 \to A_2 + B_2$, $\lambda A_1 \to \lambda A_2$ und

$A_1 B_1 \to A_2 B_2$. Eine Homomorphie von $\mathfrak{R}_1$ auf den Körper der komplexen Zahlen nennen wir einen *Charakter*. Mit $\hat{X}_{\mathfrak{R}}$ bezeichnen wir die Menge aller Charaktere des Ringes $\mathfrak{R}$. In $\hat{X}_{\mathfrak{R}}$ führen wir die durch $A(\varphi) = \varphi(A)$ $(\varphi \in \hat{X}_{\mathfrak{R}}$, $A \in \mathfrak{R})$ erzeugte schwache Topologie ein, d.h. die Umgebungen von $\varphi_0 \in \hat{X}_{\mathfrak{R}}$ sind

$$(37) \qquad U(\varphi_0; A_1, \ldots, A_n; \varepsilon) = \{\varphi : |\varphi(A_\nu) - \varphi_0(A_\nu)| < \varepsilon \text{ für } = 1, \ldots, n\}$$

für $n = 1, 2, \ldots$ und $\varepsilon > 0$ und $A_\nu \in \mathfrak{R}$, $\nu = 1, 2, \ldots, n$.

**Satz 9.** *Ist $\mathfrak{R}$ ein kommutativer Ring, so gibt es eine Homöomorphie $\varrho$ von $\hat{X}_{\mathfrak{R}}$ auf $X_{\mathfrak{R}^P}$ mit $\varphi(A) = \alpha(\varrho(\varphi))$ für alle $\varphi \in \hat{X}_{\mathfrak{R}}$ und alle $A \in \mathfrak{R}$; $\alpha$ ist dabei die nach Satz 6 der Transformation $A \in \mathfrak{R}$ zugeordnete stetige Funktion über $X_{\mathfrak{R}^P}$.*

Beweis. a) Wir können wegen Satz 6 die homomorphen Abbildungen des Ringes $S$ aller stetigen Funktionen über $X_{\mathfrak{R}^P}$ auf den Körper der komplexen Zahlen als die Charaktere aus $\hat{X}_{\mathfrak{R}}$ betrachten. Ist $\varphi$ solch ein Charakter, dann ist die Menge $K_\varphi = \{\alpha : \varphi(\alpha) = 0\}$ ein maximales Ideal in $S$. Es gibt also genau einen Punkt $x \in X_{\mathfrak{R}^P}$ mit $K_\varphi = \{\alpha : \alpha(x) = 0 \text{ und } \alpha \in S\}$ (vgl. [6], S. 54). Es sei $\varphi \leftrightarrow x$ unsere Abbildung $\varrho$. Wegen $\varphi(\chi_{X_{\mathfrak{R}^P}}) = 1$ ist $\varphi(\alpha) = \alpha(x)$. Jede Abbildung $\alpha \to \alpha(x)$ liefert natürlich einen Charakter.

b) Wir haben noch zu zeigen, daß $\varphi \leftrightarrow x$ eine Homöomorphie ist. Wegen der Ein-eindeutigkeit von $\varphi \leftrightarrow x$ und der Kompaktheit von $X_{\mathfrak{R}^P}$, genügt es zu zeigen, daß $x \to \varphi$ stetig ist. Ist $U(\varphi_0) = U(\varphi_0; \alpha_1, \ldots, \alpha_n; \varepsilon)$ eine Umgebung von $\varphi_0$ mit $x_0 \leftrightarrow \varphi_0$, dann gibt es eine Umgebung $U(x_0)$ mit $|\alpha_\nu(x_0) - \alpha_\nu(x)| < \varepsilon$ für $x \in U(x_0)$ und $\nu = 1, \ldots, n$. Es ist also $\varrho^{-1}(U(x_0)) \subset U(\varphi_0)$, d.h. $x \to \varphi$ ist stetig, w. z. b. w.

**Satz 10.** *Es gibt dann und nur dann eine homomorphe Abbildung des kommutativen Ringes $\mathfrak{R}_1$ auf den kommutativen Ring $\mathfrak{R}_2$, wenn $X_{\mathfrak{R}_2^P}$ homöomorph zu einem Teilraum von $X_{\mathfrak{R}_1^P}$ ist. Geht bei der Homomorphie $A_1$ in $A_2$ über, so geht $A_1^*$ in $A_2^*$ über und es gilt $\|A_1\| \geq \|A_2\|$.*

Beweis. Wir können uns wegen Satz 6 auf homomorphe Abbildungen des Ringes $S_1$ der stetigen Funktionen über $X_{\mathfrak{R}_1^P}$ auf den Ring $S_2$ der stetigen Funktionen über $X_{\mathfrak{R}_2^P}$ beschränken.

a) Ist $X_{\mathfrak{R}_2^P}$ homöomorph einer Teilmenge $M_0$ von $X_{\mathfrak{R}_1^P}$, dann können wir $X_{\mathfrak{R}_2^P} = M_0$ setzen und die Verengung einer Funktion $\alpha \in S_1$ auf $M_0$ liefert bereits eine Homomorphie[10]).

b) Es sei $\varphi$ eine homomorphe Abbildung von $S_1$ auf $S_2$. Die Abbildung $\alpha \to (\varphi(\alpha))(x_2)$ $(x_2 \in X_{\mathfrak{R}_2^P})$ ist ein Charakter von $\mathfrak{R}_1$, also gibt es genau ein $x_1$ mit $\alpha(x_1) = (\varphi(\alpha))(x_2)$ für alle $\alpha \in S_1$. Die Abbildung $x_2 \to x_1$ ist eine ein-eindeutige Abbildung von $X_{\mathfrak{R}_2^P}$ auf eine Teilmenge von $X_{\mathfrak{R}_1^P}$ und es ist $\alpha(x_1) = (\varphi(\alpha))(x_2)$. Da $X_{\mathfrak{R}_2^P}$ kompakt ist, ist $x_2 \to x_1$ eine Homöomorphie, wenn $x_2 \to x_1$ stetig ist. $U_0$ sei eine Umgebung von $x_1^0$ mit $x_2^0 \to x_1^0$. Wir können annehmen, daß $U_0$ gleichzeitig offen und abgeschlossen ist. $\chi_{U_0}$ ist dann aus $S_1$ und $\varphi(\chi_{U_0}) = \chi_M$ mit $M \in \mathfrak{R}_0$. Da $\chi_{U_0}(x_1) = (\varphi(\chi_{U_0}))(x_2) = \chi_M(x_2)$, ist

[10]) $M_0$ ist kompakt, also abgeschlossen in $X_{\mathfrak{R}_1^P}$. Nach [2], S. 27 kann man jede stetige Funktion auf $M_0$ zu einer stetigen Funktion auf $X_{\mathfrak{R}_1^P}$ erweitern.

$x_2 \in M$ gleichwertig mit $x_1 \in U_0$. Also wird durch $x_2 \to x_1$ $M$ in $U_0$ abgebildet, d.h. $x_2 \to x_1$ ist stetig.

c) Wegen b) können wir $X_{\mathfrak{R}_1^P}$ als Teilmenge von $X_{\mathfrak{R}_1^P}$ auffassen und wegen $\alpha(x_1) = (\varphi(\alpha))(x_2)$ die Abbildung $\varphi$ einfach als die Verengung von $X_{\mathfrak{R}_1^P}$ auf $X_{\mathfrak{R}_2^P}$. Daraus folgt $A_1^* \to A_2^*$ und $||A_1|| \geq ||A_2||$.

## 10. Kommutative Ringe nicht beschränkter, linearer Transformationen

Es sei $\mathfrak{M}$ eine ausgezeichnete Menge von Projektionen in einem Hilbert-Raum $\mathfrak{H}$. Wegen der Ergebnisse des 6. Abschnittes können wir annehmen, daß $\mathfrak{H}$ ein direktes Integral $\int \mathfrak{H}_x d\mu$ ist, dessen zugehöriges Spektralmaß den Wertebereich $\mathfrak{M}$ besitzt. Der $\sigma$-Körper, über dem das Maß $\mu$ erklärt ist, enthält $X_{\mathfrak{M}}$ als größte Menge. Die Vektoren aus $\mathfrak{H}$ sind dann Vektorfelder über $X_{\mathfrak{M}}$. Im folgenden betrachten wir, wenn es für die Beweise nötig ist, $\mathfrak{H}$ als direktes Integral $\int \mathfrak{H}_x d\mu$. Die Übertragung der Ergebnisse auf allgemeine Hilbert-Räume geschieht durch Satz 2.

Eine stetige, reelle (nicht notwendig endliche) Funktion $f$ über $X_{\mathfrak{M}}$ nennen wir *fast-endlich*, wenn sie bis auf eine nirgends-dichte Menge endlich ist (vgl. [8], S. 218). Eine komplexwertige Funktion über $X_{\mathfrak{M}}$ nennen wir fast-endlich, wenn ihr Real- und Imaginärteil stetig und fast-endlich sind. (Eine solche Funktion kann z.B. die Werte $a + i\infty$ oder $\infty - i\infty$ annehmen.) Mit Hilfe von Lemma 4 kann man in der Menge $\widetilde{S}$ aller fast-endlichen komplex-wertigen Funktionen über $X_{\mathfrak{M}}$ eine Addition, eine Multiplikation und eine Multiplikation mit komplexen Zahlen einführen. Wir führen dies für die Addition durch. Es sei $f, g \in \widetilde{S}$ und $N = \{x: f(x)$ oder $g(x)$ nicht endlich$\}$. Auf der offenen Menge $X_{\mathfrak{M}} - N$ definieren wir $h$ durch $h(x) = f(x) + g(x)$. Diese Funktion ist stetig in $X_{\mathfrak{M}} - N$. Nach Lemma 4 gibt es eine stetige Erweiterung von $h$ auf $X_{\mathfrak{M}}$, und da $\overline{X_{\mathfrak{M}} - N} = X_{\mathfrak{M}}$ ist, gibt es nur eine solche Erweiterung. Wir bezeichnen auch diese erweiterte Funktion mit $h$ und setzen $h = f + g$. Ganz entsprechend erklärt man die Multiplikation und die Multiplikation mit komplexen Zahlen. $\widetilde{S}$ wird dadurch zu einem kommutativen Ring.

$\widetilde{S}^R$ sei die Menge aller reellen Funktionen aus $\widetilde{S}$. In $\widetilde{S}^R$ wird durch die Definition $\alpha \geq \beta$ dann und nur dann, wenn $\alpha(x) \geq \beta(x)$ für alle $x \in X_{\mathfrak{M}}$ eine teilweise Ordnung eingeführt. Auf genau dieselbe Weise, wie beim Beweis von Satz 7 gezeigt wurde, daß $S^R$ ein vollständiger Vektorverband ist, zeigt man, daß $\widetilde{S}^R$ ein vollständiger Vektorverband ist.

Es sei nun $\alpha$ eine komplexe, fast-endliche Funktion über $X_{\mathfrak{M}}$. Wir ordnen $\alpha$ eine Transformation $A$ in $\mathfrak{H} = \int \mathfrak{H}_x d\mu$ auf folgende Weise zu:

1. Der Definitionsbereich $\mathfrak{D}_A$ von $A$ enthält alle $f \in \mathfrak{H}$ mit $\alpha f \in \mathfrak{H}$, d.h. mit $\int |\alpha(x) f(x)|^2 d\mu$.

2. Für $f \in \mathfrak{D}_A$ setzen wir $(Af)(x) = \alpha(x) f(x)$.

(Auf die nirgends-dichte Menge $N = \{x: \alpha(x)$ nicht endlich$\}$ kommt es nicht an, da nirgends-dichte Mengen $\mu$-Nullmengen sind.) Damit ist eine Abbildung von $\widetilde{S}$ auf eine Menge $\widetilde{\mathfrak{M}}$ von Transformationen in $\mathfrak{H}$ erklärt.

Wir betrachten zunächst die wichtigsten Eigenschaften der Abbildung $\alpha \to A$.

1. $\alpha \to A$ ist eine ein-eindeutige Abbildung von $\tilde{S}$ auf $\tilde{\mathfrak{M}}$.

Beweis. Ist $\alpha \neq \alpha'$, dann gibt es wegen der Stetigkeit und der Fast-Endlichkeit eine Menge $U \in \mathfrak{R}_0$, auf der $\alpha$ und $\alpha'$ endlich und verschieden sind. Man kann ein $f \in \mathfrak{H} \cap \mathfrak{D}_A \cap \mathfrak{D}_{A'}$ mit $f(x) = 0$ für $x \notin U$ und mit $\alpha f \neq \alpha' f$ angeben. Also ist $A \neq A'$.

2. $\alpha \to A$ ist eine Erweiterung der in Satz 4 angegebenen Abbildung von $S$ auf $\mathfrak{M}''$.

Im folgenden sei $\alpha \to A$.

3. $A$ ist eine lineare Transformation.

Beweis. a) $\mathfrak{D}_A$ ist wegen

$$\int |\alpha(x)|^2 |f(x) + g(x)|^2 d\mu \leqq 2 \int |\alpha(x)|^2 |f(x)|^2 d\mu + 2 \int |\alpha(x)|^2 |g(x)|^2 d\mu$$

eine lineare Menge.

b) $A(f+g) = \alpha(f+g) = \alpha f + \alpha g = Af + Ag$.

4. $\mathfrak{D}_A$ liegt dicht in $\mathfrak{H}$.

Beweis. Es sei $X_n = \{x : x \in X_{\mathfrak{M}} \text{ und } |\alpha(x)| < n\}$ für $n = 1, 2, \ldots$. $X_n$ ist offen, also $\mathfrak{R}$-meßbar. Aus $f \in \mathfrak{H}$ folgt daher $f_n = \chi_{X_n} f \in \mathfrak{D}_A \cap \mathfrak{H}$ und $|f - f_n|^2 = \int |f(x) - f_n(x)|^2 d\mu = \int \chi_{X_{\mathfrak{M}} - X_n}(x) |f(x)|^2 d\mu$. Die Menge $N$ aller Punkte mit $\alpha(x)$ nicht endlich ist abgeschlossen und nirgends dicht, also vom $\mu$-Maß Null. Ferner ist $\lim_{n \to \infty} \chi_{X_{\mathfrak{M}} - X_n}(x) = \chi_N(x)$. Dann ist

$$\lim_{n \to \infty} |f - f_n|^2 = \lim_{n \to \infty} \int \chi_{X_{\mathfrak{M}} - X_n}(x) |f(x)|^2 d\mu = \int \chi_N(x) |f(x)|^2 d\mu = 0.$$

$\mathfrak{D}_A$ liegt also dicht in $\mathfrak{H}$, w. z. b. w.

5. $A$ ist eine abgeschlossene Transformation.

Beweis. Es sei $f_n \in \mathfrak{D}_A$ für $n = 1, 2, \ldots$ mit $f_n \to f \in \mathfrak{H}$ und $Af_n \to g \in \mathfrak{H}$. Wir haben $f \in \mathfrak{D}_A$ und $Af = g$ zu zeigen. Wegen Lemma 8 können wir $f(x) = \lim_{\nu \to \infty} f_{n_\nu}(x)$ und $g(x) = \lim_{\nu \to \infty} \alpha(x) f_{n_\nu}(x)$ $\mu$-fast überall annehmen. Also ist $g(x) = \alpha(x) f(x)$ $\mu$-fast überall, d.h. $f \in \mathfrak{D}_A$ und $Af = g$, w. z. b. w.

Da $A$ eine dicht definierte, lineare und abgeschlossene Transformation ist, existiert $A^*$ und ist ebenfalls eine dicht definierte, lineare und abgeschlossene Transformation (vgl. etwa [7], S. 28).

6. $\bar{\alpha} \to A^*$.

Beweis. Es sei $\bar{\alpha} \to \bar{A}$. Wir haben $\bar{A} = A^*$ zu zeigen. Es ist $g \in \mathfrak{D}_{A^*}$ dann und nur dann, wenn ein $g^* \in \mathfrak{H}$ existiert mit

$$(Af, g) = \int \big((\alpha(x) f(x), g(x)\big)\, d\mu = \int \big(f(x), g^*(x)\big)\, d\mu \tag{38}$$

für alle $f \in \mathfrak{D}_A$. Es ist dann $A^* g = g^*$. Ist $g \in \mathfrak{D}_{\bar{A}}$ und $g^* = \bar{\alpha} g$, so erfüllen $g$ und $g^*$ (38), also ist $\mathfrak{D}_A \subset \mathfrak{D}_{A^*}$. Es sei nun $g \in \mathfrak{D}_{A^*}$ und $g^* = A^* g$. Wir setzen $f = \chi_M \chi_{M_{j,u}} e_k$ mit $k \in K_u$ und $M \in \mathfrak{R}$. Weiter setzen wir $f_n = \chi_{X_n} f$. Aus (38) folgt dann

$$\alpha(x)\big(e_k, g(x)\big) = \big(e_k, g^*(x)\big) \tag{39}$$

$\mu$-fast überall in $X_n \cap M_{j,u}$ für $k \in K_u$. Wegen $\overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} X_n} = X_{\mathfrak{M}}$ gilt (39) sogar in

$M_{j,u}$ und wegen (11) für alle $k \in K$. Also ist $g^*(x) = \bar{\alpha}(x) g(x)$ $\mu$-fast überall (Lemma 9 und (12) 2.). Hieraus folgt $g \in \mathfrak{D}_A$ und $A^* g = \bar{\alpha} g$. Insgesamt haben wir damit $\mathfrak{D}_{\bar{A}} = \mathfrak{D}_A = \mathfrak{D}_{A^*}$ und $\bar{A} g = A^* g$ für $g \in \mathfrak{D}_{\bar{A}}$, d.h. $A^* = \bar{A}$, w. z. b. w.

7. $A$ ist normal (zur Definition vgl. [7], S. 33).

Beweis. Es gilt nach 6. $\mathfrak{D}_A = \mathfrak{D}_{\bar{A}} = \mathfrak{D}_{A^*}$ und $|Af|^2 = \int |\alpha(x) f(x)|^2 d\mu = \int |\bar{\alpha}(x) f(x)|^2 d\mu = |A^* f|^2$. Also sind $A$ und $A^*$ metrisch gleich, d.h. $A$ ist normal (vgl. [7], S. 33).

Eine beschränkte, lineare Transformation $B$ heißt mit der linearen Transformation $T$ *vertauschbar*, wenn

$$BT \subset TB$$[11])

ist.

8. Alle $B \in \mathfrak{M}'$ sind mit $A$ vertauschbar.

Beweis. $f \in \mathfrak{D}_A$, dann ist $(BAf)(x) = \boldsymbol{B}(x)\, \alpha(x) f(x) = \alpha(x)\, \boldsymbol{B}(x) f(x) = (ABf)(x)$ $\mu$-fast überall. Also ist $BA \subset AB$.

Ist $\mathfrak{R}$ ein kommutativer Ring, so bezeichnen wir mit $\tilde{\mathfrak{R}}$ die Menge aller (dicht definierten, linearen, abgeschlossenen und) normalen Transformationen, mit denen alle Transformationen aus $\mathfrak{R}'$ vertauschbar sind.

**Satz 11.** *Ist $\mathfrak{R}$ ein kommutativer Ring, dann ist die Abbildung $\alpha \leftrightarrow A$ eine ein-eindeutige Abbildung der Menge $\tilde{S}$ aller fast-endlichen stetigen Funktionen über $X_{\mathfrak{R}^P}$ auf die Menge $\tilde{\mathfrak{R}}$ mit folgenden Eigenschaften: Aus $A \leftrightarrow \alpha$ und $B \leftrightarrow \beta$ und $C \leftrightarrow \mu\alpha + \lambda\beta$ und $D \leftrightarrow \alpha\beta$ folgt*

1. $Cf = \mu Af + \lambda Bf$ *für* $f \in \mathfrak{D}_A \cap \mathfrak{D}_B$.
2. $Df = ABf$ *für* $f \in \mathfrak{D}_B$ *und* $Bf \in \mathfrak{D}_A$.
3. $A^* \leftrightarrow \bar{\alpha}$.

*Die Abbildung $\alpha \to A$ ist eine Erweiterung der in Satz 6 erklärten Abbildung von $S$ auf $\mathfrak{R}$.*

Beweis. Wir setzen $\mathfrak{M} = \mathfrak{R}^P$. Nach 1. ist $\alpha \to A$ eine ein-eindeutige Abbildung von $\tilde{S}$ auf $\tilde{\mathfrak{M}}$. Zunächst zeigen wir $\tilde{\mathfrak{R}} = \tilde{\mathfrak{M}}$.

a) Es sei $A \in \tilde{\mathfrak{R}}$. Da $A$ normal ist, gibt es eine komplexe Spektralschar $E(z)$ derart, daß $(Af, g) = \int z\, d(E(z) f, g)$ für alle $f \in \mathfrak{D}_A$, $g \in \mathfrak{H}$ mit $BE(z) = E(z) B$ für alle $B \in \mathfrak{R}'$ und alle komplexen Zahlen $z$. $f \in \mathfrak{D}_A$ genau dann, wenn $\int |z|^2 d|E(z) f|^2 < +\infty$ ist ([7], S. 50). Es sei $E(m, n) = E(m + in) - E(m - 1 + in) - E(n + i(m-1)) + E(m - 1 + i(n-1))$, $m, n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$. Die $E(m, n)$ sind paarweise orthogonal und es gilt $\sup \{E(m, n);\, m, n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots\} = I$. $A_{n,m} = AE(m, n)$ ist eine beschränkte, lineare Transformation, die überall definiert ist. Da $BA_{m,n} = BAE(m, n) = ABE(m, n) = AE(m, n) B = A_{m,n} B$ für alle $B \in \mathfrak{R}'$ ist, ist $A_{m,n} \in \mathfrak{R}'' = \mathfrak{R}$. Es gibt also nach Satz 6 eine endliche, stetige Funktion $\alpha_{m,n}$ mit $\alpha_{m,n} \to A_{m,n}$. Da $E(m, n) f = 0$ für $f \perp E(m, n) \mathfrak{H}$, so ist $\alpha_{m,n}(x) = 0$ für $x \notin M_{m,n}$, dabei ist $M_{m,n} \in \mathfrak{S}_0$ und $E(M_{m,n}) = E(m, n)$. Wir können daher $\alpha(x) = \alpha_{m,n}(x)$ für $x \in M_{m,n}$ setzen. $\alpha$ ist dann stetig und endlich auf $\bigcup \{M_{m,n}: m, n = 0, \pm 1, \ldots\}$ und kann wegen $\overline{\bigcup \{M_{m,n}: m, n = 0, \pm 1, \ldots\}} = X_{\mathfrak{M}}$ auf eine und nur eine Weise auf $X_{\mathfrak{M}}$ stetig

[11]) $A \subset B$ bedeutet $\mathfrak{D}_A \subset \mathfrak{D}_B$ und $Af = Bf$ für $f \in \mathfrak{D}_A$ (vgl. [7], S. 28).

fortgesetzt werden. Diese Fortsetzung bezeichnen wir wieder mit $\alpha$. Sie gehört zu $\tilde{S}$, da $X_{\mathfrak{M}} - \cup\{M_{m,n}: m, n = 0, \pm 1, \ldots\}$ nirgends-dicht ist. Wir zeigen, daß unsere Abbildung von $\tilde{S}$ auf $\tilde{\mathfrak{M}}$ der Funktion $\alpha$ die Transformation $A$ zuordnet $(\alpha \to A)$. Es sei $f \in \mathfrak{D}_A$ und $f = \lim_{n\to\infty} f_n$ mit $f_\nu = \sum_{-\nu \le n, m \le \nu} E(m, n) f$. Es gilt $A f_n = \alpha f_n$ (wegen der Definition von $\alpha$) und $A f = \lim_{\nu\to\infty} \sum_{-\nu \le n, m \le \nu} E(m, n) A f =$ $\lim_{\nu\to\infty} A \sum_{-\nu \le n, m \le \nu} E(m, n) f = \lim_{n\to\infty} A f_n$, da $E(m, n) \in \mathfrak{R} \subset \mathfrak{R}'$. Wir können nach Lemma 8 annehmen, daß $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ und $(A f)(x) = \lim_{n\to\infty} (A f_n)(x)$ $\mu$-fast überall. Also gilt auch $(A f)(x) = \lim_{n\to\infty} (A f_n)(x) = \lim_{n\to\infty} \alpha(x) f_n(x) = \alpha(x) f(x)$ $\mu$-fast überall, d.h. $A f = \alpha f$ für $f \in \mathfrak{D}_A$. Wir haben noch zu zeigen, daß aus $f \in \mathfrak{H}$ und $\alpha f \in \mathfrak{H}$ auch $f \in \mathfrak{D}_A$ folgt. Es ist wieder $f = \lim_{n\to\infty} f_n$ mit $f_\nu = \sum_{-\nu \le m, n \le \nu} E(m, n) f$. Es gilt $(A f_n)(x) = \alpha(x) f_n(x)$ $\mu$-fast überall. Wir können wieder $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ $\mu$-fast überall annehmen. Dann gilt $f_n \to f$ und $\lim_{n\to\infty} (A f_n)(x) = \lim_{n\to\infty} \alpha(x) f_n(x) =$ $\alpha(x) \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \alpha(x) f(x)$ $\mu$-fast überall, d.h. $A f_n \to \alpha f$. Da $A$ abgeschlossen ist, ist $f \in \mathfrak{D}_A$. Wir haben damit $\alpha \to A$ bewiesen; es ist also $A \in \tilde{\mathfrak{M}}$.

b) In a) wurde $\tilde{\mathfrak{R}} \subset \tilde{\mathfrak{M}}$ gezeigt. Aus 1. bis 8. vor Satz 11 folgt $\tilde{\mathfrak{M}} \subset \tilde{\mathfrak{R}}$. Es ist also $\tilde{\mathfrak{R}} = \tilde{\mathfrak{M}}$. Die übrigen Behauptungen von Satz 11 sind nun einfache Folgerungen aus 1. bis 8.

**Satz 12.** *Ist $\mathfrak{R}$ ein kommutativer Ring und ist $\tilde{\mathfrak{R}}^A$ die Menge der selbstadjungierten Elemente in $\tilde{\mathfrak{R}}$, dann kann man in $\tilde{\mathfrak{R}}^A$ eine teilweise Ordnung einführen durch $A \ge B$ dann und nur dann, wenn $(A f, f) \ge (B f, f)$ für alle $f \in \mathfrak{D}_A \cap \mathfrak{D}_B$. $\tilde{\mathfrak{R}}^A$ wird dadurch zu einem vollständigen Verband.*

Beweis. Die Verengung der Abbildung $\alpha \to A$ von $\tilde{S}$ auf $\tilde{S}^R$ liefert nach Satz 11 eine ein-eindeutige Abbildung von $\tilde{S}^R$ auf $\tilde{\mathfrak{R}}^A$. Da $\tilde{S}^R$ ein vollständiger Vektorverband ist, ist Satz 12 bewiesen, wenn wir zeigen, daß $\alpha \ge \beta$ und $A \ge B$ gleichwertig sind $(\alpha \to A, \beta \to B)$. Aus $\alpha \ge \beta$ folgt wegen $\int \alpha(x) |f(x)|^2 d\mu$ $\ge \int \beta(x) |f(x)|^2 d\mu$ sofort $(A f, f) \ge (B f, f)$ für alle $f \in \mathfrak{D}_A \cap \mathfrak{D}_B$, d.h. $A \ge B$. Ist $A \ge B$ und $\alpha(x_0) < \beta(x_0)$, dann gibt es eine nicht leere Menge $U_0 \in \mathfrak{R}$ mit $U_0 \subset M_{j_0, u_0}$ und $\alpha(x) < \beta(x)$ und $\alpha(x)$ und $\beta(x)$ endlich für $x \in U_0$. Also gilt für $f = \chi_{U_0} e_k$ $(k \in K_{u_0})$ $(A f, f) = \int \alpha(x) |f(x)|^2 d\mu < \int \beta(x) |f(x)|^2 d\mu = (B f, f)$. Das ist ein Widerspruch zu $A \ge B$.

## 11. Reguläre Punkte

Wir kehren nun wieder zurück zu der im 7. Abschnitt betrachteten Abbildung von $\mathfrak{M}'$ auf die Menge der Felder von Transformationen, die (27) erfüllen (vgl. Satz 3). Es ist ein Mangel von Satz 3, daß dort nicht bewiesen werden konnte, daß aus $A \approx \boldsymbol{A}(x)$ und $B \approx \boldsymbol{B}(x)$ folgt $AB \approx \boldsymbol{A}(x) \cdot \boldsymbol{B}(x)$. Wir zeigen in diesem Abschnitt, daß dies im allgemeinen gar nicht richtig ist. Wir nennen einen Punkt $x \in X_{\mathfrak{M}}$ regulär, wenn aus $A \approx \boldsymbol{A}(x)$, $B \approx \boldsymbol{B}(x)$ und $C = AB \approx \boldsymbol{C}(x)$ für alle $A, B \in \mathfrak{M}'$ stets $\boldsymbol{C}(x) = \boldsymbol{A}(x) \boldsymbol{B}(x)$ folgt. Die regulären Punkte sind genau die Punkte, für welche die im Korollar zu Satz 4 ange-

gebene Abbildung von $\mathfrak{M}'$ auf $\mathfrak{N}_x$ eine Homomorphie ist, d.h. auch noch $AB \to A'(x)\,B'(x)$ gilt.

*Lemma 14.* Es sei $A \approx \boldsymbol{A}(x)$ und $A \sim \boldsymbol{B}(x)$ und $\boldsymbol{B}(x)$ schwach stetig in $x_0$, dann ist $\boldsymbol{A}(x_0) = \boldsymbol{B}(x_0)$.

Beweis. Wir nehmen an, es wäre $\boldsymbol{A}(x_0) \neq \boldsymbol{B}(x_0)$. Dann gibt es ein Indexpaar $(i, k)$ mit $(\boldsymbol{A}(x_0)\,e_i, e_k) \neq (\boldsymbol{B}(x_0)\,e_i, e_k)$. Wegen der Stetigkeit gilt dies auch in einer ganzen Umgebung $U(x_0)$ von $x_0$. Ohne Einschränkung der Allgemeinheit können wir annehmen, daß $U(x_0)$ in einem $M_{j,u}$ liegt, aus $\mathfrak{N}_0$ stammt und sogar $\int\limits_{U(x_0)} (\boldsymbol{A}(x)\,e_i, e_k)\,d\mu \neq \int\limits_{U(x_0)} (\boldsymbol{B}(x)\,e_i, e_k)\,d\mu$. Dann ist aber $A\,\chi_{U(x_0)}\,e_i \neq A\,\chi_{U(x_0)}\,e_i$ (Widerspruch).

*Lemma 15.* Ist $A \approx \boldsymbol{A}(x)$, $B \approx \boldsymbol{B}(x)$, $AB \approx \boldsymbol{C}(x)$ und $BA \approx \boldsymbol{D}(x)$ und ferner $\boldsymbol{A}(x)$ und $\boldsymbol{A}^*(x)$ stark stetig in $x_0$[12]), dann ist $\boldsymbol{C}(x_0) = \boldsymbol{A}(x_0)\,\boldsymbol{B}(x_0)$ und $\boldsymbol{D}(x_0) = \boldsymbol{B}(x_0)\,\boldsymbol{A}(x_0)$.

Beweis. Nach Lemma 14 genügt es zu zeigen, daß $\boldsymbol{A}(x)\,\boldsymbol{B}(x)$ und $\boldsymbol{B}(x)\,\boldsymbol{A}(x)$ schwach stetig in $x_0$ sind. Daß $\boldsymbol{B}(x)\,\boldsymbol{A}(x)$ schwach stetig in $x_0$ ist, folgt wegen der starken Stetigkeit von $\boldsymbol{A}(x)$ in $x_0$ aus

$$\begin{aligned}\big|(\boldsymbol{B}(x)\,\boldsymbol{A}(x)\,f, g) - (\boldsymbol{B}(x_0)\,\boldsymbol{A}(x_0)\,f, g)\big| \leq \big|((\boldsymbol{B}(x) - \boldsymbol{B}(x_0))\,\boldsymbol{A}(x_0)\,f, g)\big| + \\ + \big|(\boldsymbol{B}(x)\,(\boldsymbol{A}(x) - \boldsymbol{A}(x_0))\,f, g)\big|.\end{aligned}$$

Der 1. Ausdruck geht gegen Null für $x \to x_0$, da $\boldsymbol{B}(x)$ schwach stetig in $x_0$ ist. Wegen

$$\big|(\boldsymbol{B}(x)\,(\boldsymbol{A}(x) - \boldsymbol{A}(x_0))\,f, g)\big| \leq \|\boldsymbol{B}(x)\,(\boldsymbol{A}(x) - \boldsymbol{A}(x_0))\,f\|\,|g| \leq \|B\|\,\|\boldsymbol{A}(x)\,f - \boldsymbol{A}(x_0)\,f\|\,|g|$$

und der starken Stetigkeit geht auch der 2. Ausdruck für $x \to x_0$ gegen Null. Da $\boldsymbol{A}^*(x)$ stark stetig in $x_0$ ist, ist $\boldsymbol{B}^*(x)\,\boldsymbol{A}^*(x)$ schwach stetig in $x_0$, also auch $(\boldsymbol{B}^*(x)\,\boldsymbol{A}^*(x))^* = \boldsymbol{A}(x)\,\boldsymbol{B}(x)$.

Wir fügen noch einige Bemerkungen an, die im folgenden nützlich sind.

(40) { Aus $A \approx \boldsymbol{A}(x)$ und $\boldsymbol{A}(x)\,e_i \to \boldsymbol{A}(x_0)\,e_i$ für $x \to x_0$ und alle $i \in K$ folgt die starke Stetigkeit von $\boldsymbol{A}(x)$ in $x_0$.

Beweis. Es gilt auch $\boldsymbol{A}(x) \sum\limits_{\nu=1}^{n} \lambda_{i_\nu} e_{i_\nu} \to \boldsymbol{A}(x_0) \sum\limits_{\nu=1}^{n} \lambda_{i_\nu} e_{i_\nu}$. Es sei $f$ beliebig aus $\mathfrak{H}'$ und $\varepsilon > 0$, dann gibt es ein $\sum\limits_{\nu=1}^{n} \lambda_{i_\nu} e_{i_\nu} = f_\varepsilon$ mit $|f_\varepsilon - f| < \frac{\varepsilon}{4\,|A|}$ und eine Umgebung $U(x_0)$ von $x_0$ mit $|\boldsymbol{A}(x)\,f_\varepsilon - \boldsymbol{A}(x_0)\,f_\varepsilon| < \frac{\varepsilon}{2}$. Es gilt (wegen $\|\boldsymbol{A}(x)\| \leq \|A\|$) $|\boldsymbol{A}(x)\,f - \boldsymbol{A}(x_0)\,f| \leq |\boldsymbol{A}(x)\,(f - f_\varepsilon)| + |\boldsymbol{A}(x)\,f_\varepsilon - \boldsymbol{A}(x_0)\,f_\varepsilon| + |\boldsymbol{A}(x_0)\,(f - f_\varepsilon)| \leq \|A\| \cdot \frac{\varepsilon}{4\,|A|} + \frac{\varepsilon}{2} + \|A\| \cdot \frac{\varepsilon}{4\,A}$. Also ist $A(x)$ stark stetig in $x_0$, w. z. b. w.

(41) { Ist $A$ eine beschränkte, lineare Transformation in $\mathfrak{H}'$, dann ist $\boldsymbol{I}(x)\,A\,\boldsymbol{I}(x)$ überall stark stetig.

Beweis. Wegen (40) genügt es $\boldsymbol{I}(x)\,A\,\boldsymbol{I}(x)\,e_i \to \boldsymbol{I}(x_0)\,A\,\boldsymbol{I}(x_0)\,e_i$ zu beweisen. Ist $\boldsymbol{I}(x_0)\,e_i = 0$, dann ist $\boldsymbol{I}(x)\,e_i = 0$ in einer Umgebung $U(x_0)$ von $x_0$, da

[12]) $\boldsymbol{A}(x)$ heißt stark stetig in $x_0$, wenn $\boldsymbol{A}(x)\,f \to \boldsymbol{A}(x^0)\,f$ für $x \to x_0$ und für alle $f \in \mathfrak{H}'$.

$\{x: e_i \in \mathfrak{H}_x\}$ offen und abgeschlossen ist. Wegen $\boldsymbol{I}(x) A \boldsymbol{I}(x) e_i = 0$ für $x \in U(x_0)$ gilt $\boldsymbol{I}(x) A \boldsymbol{I}(x) e_i \to \boldsymbol{I}(x_0) A \boldsymbol{I}(x_0) e_i = 0$. Ist $\boldsymbol{I}(x) e_i = e_i$, dann gibt es ebenfalls eine Umgebung $U(x_0)$ mit $\boldsymbol{I}(x) e_i = e_i$ für alle $x \in U(x_0)$. Also ist in $U(x_0)$ $\boldsymbol{I}(x) A \boldsymbol{I}(x) e_i = \boldsymbol{I}(x) A e_i$. $\boldsymbol{I}(x) A e_i \to \boldsymbol{I}(x_0) A e_i$ folgt aus der starken Stetigkeit von $\boldsymbol{I}(x)$, die ihrerseits wieder aus (40) und $\{x: e_i \in \mathfrak{H}_x\} \in \mathfrak{R}_0$ folgt. Damit ist (41) bewiesen.

*Lemma 16.* $x_0 \in X_{\mathfrak{M}}$ ist dann und nur dann regulär, wenn alle $\boldsymbol{A}(x)$ mit $A \approx \boldsymbol{A}(x)$ in $x_0$ stark stetig sind $(A \in \mathfrak{R}')$.

Beweis. Dann: Nach Lemma 15.

Nur dann: Es sei $A \approx \boldsymbol{A}(x)$ und $\boldsymbol{A}(x)$ nicht stark stetig in $x_0$. Wir nehmen noch an, daß $x_0$ regulär sei und leiten daraus einen Widerspruch ab.

a) Es sei $B \approx \boldsymbol{I}(x) \boldsymbol{A}(x_0) \boldsymbol{I}(x)$, dann ist $A - B \approx \boldsymbol{A}(x) - \boldsymbol{I}(x) \boldsymbol{A}(x_0) \boldsymbol{I}(x)$. Wegen (42) ist $\boldsymbol{A}(x) - \boldsymbol{I}(x) \boldsymbol{A}(x_0) \boldsymbol{I}(x)$ nicht stark stetig in $x_0$. Wir können daher im folgenden zusätzlich annehmen, daß $\boldsymbol{A}(x_0) = 0$ ist.

b) Es ist $A = A_1 + i A_2$ mit $A_1 = \frac{1}{2}(A + A^*)$ und $A_2 = \frac{1}{2}(iA^* - iA)$. Es ist $\boldsymbol{A}_1(x_0) = \frac{1}{2}\big(\boldsymbol{A}(x_0) + \boldsymbol{A}^*(x_0)\big) = 0$ und ebenso $\boldsymbol{A}_2(x_0) = 0$. $\boldsymbol{A}_1(x)$ und $\boldsymbol{A}_2(x)$ können nicht gleichzeitig in $x_0$ stark stetig sein, da sonst $\boldsymbol{A}(x)$ in $x_0$ stark stetig wäre. Wir können im folgenden annehmen, daß $A$ auch noch selbstadjungiert ist.

c) Jede selbstadjungierte Operation $A$ läßt sich bekanntlich als Differenz zweier positiv semidefiniter Operationen $A^+$ und $A^-$ darstellen mit $A^+ A^- = 0$ (dies folgt ohne weiteres aus Satz 6). Es ist $A = A^+ - A^-$ und daher kann nicht gleichzeitig $\boldsymbol{B}(x)$ und $\boldsymbol{C}(x)$ in $x_0$ stark stetig sein $\big(A^+ \approx \boldsymbol{B}(x)$ und $A^- \approx \boldsymbol{C}(x)\big)$. Da $x_0$ nach Annahme regulär ist, ist $\boldsymbol{B}(x_0)\, \boldsymbol{C}(x_0) = 0$. Wegen $\boldsymbol{B}(x_0) - \boldsymbol{C}(x_0) = \boldsymbol{A}(x_0) = 0$ ist $\boldsymbol{B}(x_0) = \boldsymbol{C}(x_0)$. Es ist also $\boldsymbol{B}(x_0) \boldsymbol{B}(x_0) = 0$. Ferner ist $\boldsymbol{B}(x_0)$ selbstadjungiert, da $A^+$ es ist. Es gilt nun $0 = \big(\boldsymbol{B}(x_0)^2 f, f\big) = \big(\boldsymbol{B}(x_0) f, \boldsymbol{B}(x_0) f\big) = |\boldsymbol{B}(x_0) f|^2$ für alle $f \in \mathfrak{H}'$. Es ist also $\boldsymbol{B}(x_0) = \boldsymbol{C}(x_0) = 0$. Wir können also sogar annehmen, daß $A$ noch positiv semidefinit ist.

d) Da $A$ positiv semidefinit ist, ist auch $\boldsymbol{A}(x)$ positiv semidefinit, denn $\big(\boldsymbol{A}(x_1) f, f\big) \not\geqq 0$ hat $\big(\boldsymbol{A}(x) f, f\big) \not\geqq 0$ in einer ganzen Umgebung $U(x_1)$ von $x_1$ zur Folge. Man kann $U(x_1)$ so wählen, daß $\int\limits_{U(x_1)} \big(\boldsymbol{A}(x) f, f\big)\, d\mu \not\geqq 0$. Dann ist für $g = \chi_{U(x_1)} \boldsymbol{I}(x) f$ nun $(A g, g) = \int\limits_{U(x_1)}^{U(x_1)} \big(\boldsymbol{A}(x) \boldsymbol{I}(x) f, \boldsymbol{I}(x) f\big)\, d\mu = \int\limits_{U(x_1)} \big(\boldsymbol{A}(x) f, f\big)\, d\mu \not\geqq 0$. $A$ wäre also nicht positiv semidefinit (Widerspruch). Wir können noch annehmen, daß $\|A\| \leqq 1$ ist; dann ist auch $\|\boldsymbol{A}(x)\| \leqq 1$. Für positiv semidefinite Transformationen mit $\|B\| \leqq 1$ gilt allgemein $(Bf, f) \geqq (Bf, Bf) = (B^2 f, f)$. (Dies kann man auch leicht aus Satz 6 folgern.) Es gilt also auch $\big(\boldsymbol{A}(x) f, f\big) \geqq \big(\boldsymbol{A}(x) f, \boldsymbol{A}(x) f\big) = \big(\boldsymbol{A}(x)^2 f, f\big)$. Da $\boldsymbol{A}(x)$ schwach stetig in $x_0$ ist, gilt $\big(\boldsymbol{A}(x) f, f\big) \to \big(\boldsymbol{A}(x_0) f, f\big) = 0$ für $x \to x_0$. Wegen $\big(\boldsymbol{A}(x) f, f\big) \geqq \big(\boldsymbol{A}(x) f, \boldsymbol{A}(x) f\big) \geqq 0$ gilt auch $\boldsymbol{A}(x) f \to \boldsymbol{A}(x_0) f = 0$, d.h. $\boldsymbol{A}(x)$ ist stark stetig in $x_0$ (Widerspruch). $x_0$ kann also kein regulärer Punkt sein.

**Satz 13.** *Ein Punkt $x_0$ ist regulär, wenn $x_0$ isoliert ist in $X_{\mathfrak{M}}$ oder der Hilbert-Raum $\mathfrak{H}_{x_0}$ endlich-dimensional ist. Alle anderen regulären Punkte bilden eine nirgends-dichte Menge.*

Beweis. 1. Ist $x_0$ isoliert, so ist $\boldsymbol{A}(x)$ natürlich stark stetig in $x_0$. Nach Lemma 16 ist $x_0$ regulär. Ist $\mathfrak{H}_{x_0}$ endlich-dimensional, so gibt es eine ganze Umgebung $U(x_0)$ von $x_0$ mit $\mathfrak{H}_x = \mathfrak{H}_{x_0}$ für $x \in U(x_0)$. Es gibt wegen der Stetigkeit der $f_k$ [vgl. (18)] eine Umgebung $U'$ von $x_0$ mit $K_x \supset K_{x_0}$ für alle $x < U'$. Gäbe es in jeder Umgebung $U$ von $x_0$ mit $U < U'$ ein $x_U$ mit $K_{x_U} \neq K_{x_0}$, so könnte man wegen der Stetigkeit der $f_k$ $x_U \in U \cap M_0$ ($M_0 = \cup \{M_u : E_u \neq 0\}$ vgl. S. 166) wählen. Es ist dann $K_{x_U} = K_u \supsetneq K_{x_0}$. Es sei $u_0 = \min \{u : K_{x_U} = K_u\}$. Dann ist $K_{u_0} \supsetneq K_{x_0}$, da Kardinalzahlen wohlgeordnet sind. Es sei $k_0 \in K_{u_0}$ und $k \notin K_{x_0}$. Dann ist $f_{k_0}(x_0) = 1$, da $f_{k_0}(x_U) = 1$ für alle $x_U$ (wegen $K_{x_U} \supset K_{u_0}$) und $f_{k_0}$ stetig ist. Also $k_0 \in K_{x_0}$ (Widerspruch). Es gibt also eine Umgebung $U(x_0)$ mit $K_x = K_{x_0}$ für $x \in U(x_0)$, d.h. $\mathfrak{H}_x = \mathfrak{H}_{x_0}$ für $x \in U(x_0)$. Da in endlich-dimensionalen Räumen starke und schwache Stetigkeit dasselbe sind, ist die Verengung von $\boldsymbol{A}(x)$ auf $\mathfrak{H}_x = \mathfrak{H}_{x_0}$ stark stetig, und da $\boldsymbol{A}(x)$ auf $\mathfrak{H}_{x_0}^{\perp}$ die Nulltransformation ist, ist $\boldsymbol{A}(x)$ in $x_0$ stark stetig. Wiederum ist nach Lemma 16 $x_0$ ein regulärer Punkt.

2. Die Menge $M$ aller isolierten Punkte und aller Punkte mit endlich-dimensionalen $\mathfrak{H}_x$ ist offen. Es genügt daher zu zeigen, daß die regulären Punkte in $X_{\mathfrak{M}} - \overline{M}$ eine nirgends-dichte Menge bilden. Es sei $M'_{j,u} = (X_{\mathfrak{M}} - \overline{M}) \cap M_{j,u}$ [13]), dann ist $M'_{j,u} \in \mathfrak{R}_0$ und $\cup M'_{j,u}$ offen. Wegen $\sup \{E(M'_{j,u}) : u \leq \dim \mathfrak{H}', j \in J\} = E(X_{\mathfrak{M}} - \overline{M}) \sup \{E(M_{j,u}) : u \leq \dim \mathfrak{H}', j \in J\} = E(X_{\mathfrak{M}} - \overline{M}) I = E(X_{\mathfrak{M}} - \overline{M})$ und (7) ist $\cup \{M'_{j,u} : u \leq \dim \mathfrak{H}', j \in J\} = X_{\mathfrak{M}} - \overline{M}$. Es genügt daher zu zeigen, daß $M'_{j,u}$ keine regulären Punkte enthält.

Es sei $x_0 \in M'_{j,u}$. Wir betrachten nun Systeme von paarweise fremden, nicht leeren Teilmengen von $M'_{j,u}$, die aus $\mathfrak{R}_0$ stammen und $x_0$ nicht enthalten. Da $E(M'_{j,u})$ separabel ist, sind alle diese Systeme abzählbar oder endlich. Nach dem Zornschen Lemma gibt es maximale Systeme dieser Art. Ein maximales System kann nicht endlich sein, denn wäre $\{U_\nu : \nu = 1, \ldots, n\}$ ein maximales System, dann wäre $U = \bigcup_{\nu=1}^{n} U_\nu$ und $U < M'_{j,u}$. Die offene Menge $M'_{j,u} - U$ müßte gleich $\{x_0\}$ sein, da sonst unser System nicht maximal wäre; $x_0$ wäre also isoliert (Widerspruch).

Es sei nun $\{U_\nu : \nu = 1, 2, \ldots\}$ ein maximales System. Es ist $\overline{\bigcup_{\nu=1}^{\infty} U} = M'_{j,u}$. Wäre dies nicht der Fall, so wäre $M'_{j,u} - \overline{\bigcup_{\nu=1}^{\infty} U_\nu}$ eine offene nicht leere Menge, die nicht aus dem Punkt $x_0$ allein besteht, da dieser Punkt nicht isoliert ist. Also könnte man das maximale System $\{U_\nu : \nu = 1, 2, \ldots\}$ noch erweitern (Widerspruch).

Da $u$ eine unendliche Kardinalzahl ist (sonst wäre $M'_{j,u} < M$), gibt es eine Folge $\{i_\nu\}$ von paarweise verschiedenen $i_\nu \in K_u$; also ist $e_{i_\nu} \in \mathfrak{H}_x = \mathfrak{H}_{x_0}$ für alle $x \in M'_{j,u}$. Wir betrachten nun das Feld von Transformationen $\boldsymbol{A}(x)$ mit

$$\boldsymbol{A}(x)\, e_{i_1} = \sum_{\nu=1}^{\infty} \chi_{U_\nu}(x)\, e_{i_\nu}, \qquad \boldsymbol{A}(x)\, e_i = 0 \qquad \text{für alle } i \neq i_1.$$

[13]) Zu $M_{j,u}$ s. S. 167.

$\boldsymbol{A}(x)$ erfüllt (27). (27) 1. folgt aus $e_{i_\nu} \in \mathfrak{H}_x$ für alle $x \in M'_{j,u}$. (27) 3. folgt aus $\boldsymbol{A}(x) e_{i_1} = e_{i_\nu}$ für $x \in U_\nu$, sonst $= 0$; also ist $\|\boldsymbol{A}(x)\| \leq 1$. $(\boldsymbol{A}(x) e_i, e_k)$ ist stetig, denn $(\boldsymbol{A}(x) e_i, e_k) = 0$ für $i \neq i_1$ oder $k \neq i_\nu$ für $\nu = 1, 2, \ldots$ und $(\boldsymbol{A}(x) e_{i_1}, e_{i_\nu}) = \chi_{U_\nu}(x)$ für $k = i_\nu$. $\chi_{U_\nu}$ ist stetig wegen $U_\nu \in \mathfrak{R}_0$. Wegen $\|\boldsymbol{A}(x)\| \leq 1$ ist dann auch $(\boldsymbol{A}(x) f, g)$ stetig für alle $f, g \in \mathfrak{H}'$ (vgl. S. 173). $\boldsymbol{A}(x)$ ist also schwach stetig.

$\boldsymbol{A}(x)$ ist aber nicht stark stetig in $x_0$. Es ist $\boldsymbol{A}(x_0) = 0$, da $x_0 \notin U_\nu$ für $\nu = 1, 2, \ldots$, und $|\boldsymbol{A}(x) e_{i_1}| = 1$ für $x \in \overset{\infty}{\underset{\nu=1}{\cup}} U_\nu$. Jede Umgebung von $x_0$ enthält Punkte aus $\overset{\infty}{\underset{\nu=1}{\cup}} U_\nu$, da $\overline{\overset{\infty}{\underset{\nu=1}{\cup}} U_\nu} = M'_{j,u}$. Es kann also $|\boldsymbol{A}(x) e_{i_1}|$ nicht gegen Null konvergieren für $x \to x_0$ und damit erst recht nicht $\boldsymbol{A}(x) e_{i_1}$ gegen $\boldsymbol{A}(x_0) e_{i_1} = 0$. $\boldsymbol{A}(x)$ ist nicht stark stetig in $x_0$. Da $\boldsymbol{A}(x)$ (27) erfüllt, gibt es ein $A \in \mathfrak{M}'$ mit $A \approx \boldsymbol{A}(x)$. $x_0$ ist also nicht regulär, w. z. b. w.

Wir schließen diesen Abschnitt mit einigen einfachen Bemerkungen über die Menge der Transformationen aus $\mathfrak{M}'$, deren stetige Zerlegungen in allen Punkten von $X_{\mathfrak{M}}$ stark stetig sind. Mit $\mathfrak{N}$ bezeichnen wir die Menge der Transformationen aus $\mathfrak{M}'$ mit $A \approx \boldsymbol{A}(x)$, für die $\boldsymbol{A}(x)$ und $\boldsymbol{A}^*(x)$ in allen Punkten von $X_{\mathfrak{M}}$ stark stetig sind. $\mathfrak{N}$ hat folgende Eigenschaften:

1. Mit $A$ und $B$ gehören auch $\lambda A + \mu B$, $A^*$ und $AB$ zu $\mathfrak{N}$.

2. $\mathfrak{N}$ ist abgeschlossen gegen Normkonvergenz, d. h. aus $A_\nu \in \mathfrak{N}$ $\nu = 1, 2, \ldots$ und $\|A - A_\nu\| \to 0$ für $\nu \to \infty$ folgt $A \in \mathfrak{N}$.

3. $\mathfrak{M} \subset \mathfrak{N} \subset \mathfrak{M}'$, $\mathfrak{N}' = \mathfrak{M}''$ und $\mathfrak{N}'' = \mathfrak{M}'$.

Beweis. Zu 1.: Wir beweisen nur die Behauptung für $AB$. Die anderen Behauptungen sind offensichtlich richtig. Es gilt

$$\begin{aligned} |\boldsymbol{A}(x)\boldsymbol{B}(x) f - \boldsymbol{A}(x_0)\boldsymbol{B}(x_0) f| &\leq |(\boldsymbol{A}(x) - \boldsymbol{A}(x_0))\boldsymbol{B}(x_0) f| + |\boldsymbol{A}(x)(\boldsymbol{B}(x) - \boldsymbol{B}(x_0)) f| \\ &\leq |(\boldsymbol{A}(x) - \boldsymbol{A}(x_0))\boldsymbol{B}(x_0) f| + \|A\| \, |\boldsymbol{B}(x) f - \boldsymbol{B}(x_0) f| . \end{aligned}$$

Für $x \to x_0$ gehen wegen der starken Stetigkeit von $\boldsymbol{A}(x)$ und $\boldsymbol{B}(x)$ die beiden letzten Ausdrücke gegen Null; also ist $\boldsymbol{A}(x)\boldsymbol{B}(x)$ stark stetig in $x_0$. Nach Lemma 17 ist $AB \approx \boldsymbol{A}(x)\boldsymbol{B}(x)$. Da $(AB)^* = B^* A^* \approx \boldsymbol{B}^*(x)\boldsymbol{A}^*(x)$ ebenfalls stark stetig ist, ist $AB \in \mathfrak{N}$.

Zu 2.: Aus $\|A - A_\nu\| < \varepsilon$ folgt nach Satz 3 $\|\boldsymbol{A}(x) - \boldsymbol{A}_\nu(x)\| < \varepsilon$ für alle $x \in X_{\mathfrak{M}}$. Also ist $|\boldsymbol{A}_\nu(x) f - \boldsymbol{A}(x) f| \leq \varepsilon |f|$, falls nur $\nu$ hinreichend groß ist. Aus $|\boldsymbol{A}(x) f - \boldsymbol{A}(x_0) f| \leq |\boldsymbol{A}(x) f - \boldsymbol{A}_\nu(x) f| + |\boldsymbol{A}_\nu(x) f - \boldsymbol{A}_\nu(x_0) f| + |\boldsymbol{A}_\nu(x_0) f - \boldsymbol{A}(x_0) f|$ und der starken Stetigkeit der $\boldsymbol{A}_\nu(x)$ folgt die starke Stetigkeit von $\boldsymbol{A}(x)$. Da $\|A_\nu^* - A^*\| = \|A_\nu - A\|$, ist auch $\boldsymbol{A}^*(x)$ stark stetig. Es ist daher $A \in \mathfrak{N}$.

Zu 3.: $\mathfrak{M} \subset \mathfrak{N}$ folgt aus Satz 4 und der starken Stetigkeit von $\boldsymbol{I}(x)$. $A \in \mathfrak{N}' \subset \mathfrak{M}'$ hat nach Definition $AB = BA$ für alle $B \in \mathfrak{N}$ zur Folge. Nach dem Beweis des Korollar von Satz 3 erfüllt $\boldsymbol{I}(x) C \boldsymbol{I}(x)$ (27) für alle beschränkten, linearen Transformationen $C$ in $\mathfrak{H}'$. Es gibt also ein $C' \in \mathfrak{M}'$ mit $C' \approx \boldsymbol{I}(x) C \boldsymbol{I}(x)$. Wegen (41) gehört $C'$ sogar zu $\mathfrak{N}$. Es sei $A \approx \boldsymbol{A}(x)$, dann gilt wegen $A \in \mathfrak{N}'$ und $C' \in \mathfrak{N}$ und Lemma 15

$$\boldsymbol{A}(x)\boldsymbol{I}(x) C \boldsymbol{I}(x) = \boldsymbol{I}(x) C \boldsymbol{I}(x) \boldsymbol{A}(x)$$

für alle $x \in X_{\mathfrak{M}}$. Wählen wir insbesondere für $C$ eine Transformation $B_{x_0}$, die $\mathfrak{H}_{x_0}$ invariant läßt und $\mathfrak{H}_{x_0}^{\perp}$ in die Null abbildet, dann ist $\boldsymbol{A}(x_0) B_{x_0} = B_{x_0} \boldsymbol{A}(x_0)$, da $\boldsymbol{I}(x_0) B_{x_0} \boldsymbol{I}(x_0) = B_{x_0}$. Beschränken wir die Transformationen von $\mathfrak{H}'$ auf $\mathfrak{H}_{x_0}$, dann gilt $A'(x_0) B'_{x_0} = B'_{x_0} A'(x_0)$ für alle Transformationen $B'_{x_0}$ in $\mathfrak{H}_{x_0}$. Es ist daher $A'(x_0) = \alpha(x_0) I'_{x_0}$ ($I'_{x_0}$ = identische Transformation in $\mathfrak{H}_{x_0}$) und damit $\boldsymbol{A}(x_0) = \alpha(x_0) \boldsymbol{I}(x_0)$. Da dies für alle $x_0 \in X_{\mathfrak{M}}$ gilt, ist $A \approx \alpha(x) \boldsymbol{I}(x)$, d.h. $A \in \mathfrak{M}''$. Es ist also $\mathfrak{N}' \subset \mathfrak{M}''$. Aus $\mathfrak{N} \subset \mathfrak{M}'$ folgt $\mathfrak{M}'' \subset \mathfrak{N}'$. Also ist $\mathfrak{M}'' = \mathfrak{N}'$ und $\mathfrak{N}'' = \mathfrak{M}''' = \mathfrak{M}'$, w. z. b. w.

## Anhang: Nirgends-dichte und magere Mengen in $X_{\mathfrak{M}}$

Ist $X_{\mathfrak{M}}$ der zu einer ausgezeichneten Menge $\mathfrak{M}$ gehörige topologische Raum, dann ist *jede magere Menge nirgends-dicht.* In $X_{\mathfrak{M}}$ bedeutet also mager und nirgends-dicht dasselbe.

Beweis. $N$ sei eine magere Menge in $X_{\mathfrak{M}}$ und $\{E_j : j \in J\}$ eine separable Basis von $I$ in $\mathfrak{M}$. Es sei $E_j = E(M_j)$ mit $M_j \in \mathfrak{R}_0$. Die $M_j$ sind paarweise fremd, $M = \cup\{M_j : j \in J\}$ ist offen und $\overline{M} = X_{\mathfrak{M}}$ [nach (7)].

a) $N$ ist nach dem Beweis von Lemma 9 nirgends-dicht, wenn $N_j = N \cap M_j$ in $M_j$ nirgends-dicht ist für alle $j \in J$.

b) In $M_j$ können wir ein endliches Maß $\mu_j | \mathfrak{R}_j$ einführen [vgl. (15)]. Wir verengen dieses Maß auf den $\sigma$-Körper $\mathfrak{R}'_j$ aller Borel-Mengen in $\mathfrak{R}_j$. Das ist der kleinste $\sigma$-Körper, der alle kompakten Teilmengen von $M_j$ enthält. Wir zeigen, daß das Maß $\mu_j | \mathfrak{R}'_j$ regulär ist (s. [4], S. 224). Es genügt

$$\mu_j(U) = \sup\{\mu_j(C) : C \text{ kompakt und } U \supset C\} \tag{42}$$

für alle offenen Mengen $U \subset M_j$ zu beweisen (nach [4], S. 228, Theorem F). Es sei $U \subset M_j$ und $U$ offen. Ferner sei $\{U_\nu : \nu = 1, 2, \ldots\}$ ein maximales System von nicht leeren, paarweise fremden Mengen $U_\nu$ mit $U_\nu \in \mathfrak{R}_0$ und $U_\nu \subset U$. Nach dem Zornschen Lemma gibt es solche maximalen Systeme, und da $E(M_j)$ separabel ist, sind diese Systeme endlich oder abzählbar (dies haben wir bereits mit der Bezeichnung $\{U_\nu : \nu = 1, 2, \ldots\}$ vorweggenommen). Es ist $\mu_j(U) \geq \sum_{\nu=1}^{\infty} \mu_j(U_\nu) = \mu_j\left(\bigcup_{\nu=1}^{\infty} U_\nu\right) = \mu_j\left(\overline{\bigcup_{\nu=1}^{\infty} U_\nu}\right)$, da $\bigcup_{\nu=1}^{\infty} U_\nu$ offen ist und nirgends-dichte Mengen das $\mu_j$-Maß Null haben. Wäre $\overline{\bigcup_{\nu=1}^{\infty} U_\nu} \not\supset U$, dann wäre die offene Menge $U - \overline{\bigcup_{\nu=1}^{\infty} U_\nu}$ nicht leer und man könnte $\{U_\nu : \nu = 1, 2, \ldots\}$ erweitern. Es ist also $U \subset \overline{\bigcup_{\nu=1}^{\infty} U_\nu}$ und $\mu_j(U) \leq \mu_j\left(\bigcup_{\nu=1}^{\infty} U_\nu\right)$. Insgesamt haben wir $\sum_{\nu=1}^{\infty} \mu_j(U_\nu) = \mu_j(U)$. Ist das System $\{U_\nu : \nu = 1, 2, \ldots\}$ endlich, dann ist $\bigcup_{\nu=1}^{n} U_\nu = \overline{\bigcup_{\nu=1}^{n} U_\nu}$ [14]) kompakt und wegen $\mu_j\left(\bigcup_{\nu=1}^{n} U_\nu\right) = \mu_j(U)$ ist (42) erfüllt. Ist das System unendlich, so ist

[14]) Ist $\{U_\nu : = 1, 2, \ldots\}$ endlich, dann ist $\sum_{\nu=1}^{\infty}$ und $\bigcup_{\nu=1}^{\infty}$ durch $\sum_{\nu=1}^{n}$ und $\bigcup_{\nu=1}^{n}$ zu ersetzen.

$U_n' = \bigcup_{\nu=1}^{n} U_\nu$ kompakt und $\sup\{\mu_j(U_n') : n = 1, 2, \ldots\} = \sup\left\{\sum_{\nu=1}^{n} \mu_j(U_\nu) : n = 1, 2, \ldots\right\}$ $= \sum_{\nu=1}^{\infty} \mu_j(U_\nu) = \mu_j(U)$, also ist (42) erfüllt. Da $\mu_j/\mathfrak{R}_j$ regulär ist, gilt der Satz von LUSIN (vgl. [4], S. 242).

c) Wegen a) genügt es zu zeigen, daß eine magere Menge $N_j \subset M_j$ in $M_j$ nirgends-dicht ist. Es ist $N_j = \bigcup_{\nu=1}^{\infty} N_\nu$ mit nirgends-dichten $N_\nu$. Dann ist auch $\overline{N}_\nu$ nirgends-dicht und $N_j' = \bigcup_{\nu=1}^{\infty} \overline{N}_\nu$ ist mager. $N_j'$ ist eine Borel-Menge mit $N_j' \supset N_j$. Es genügt zu zeigen, daß $N_j'$ nirgends-dicht ist. $\chi_{N_j'}$ ist Borel-meßbar in $M_j$, also gibt es nach dem Satz von LUSIN zu jedem $\varepsilon > 0$ eine kompakte Menge $C_\varepsilon$, auf der $\chi_{N_j'}$ stetig ist, mit $\mu_j(M_j - C_\varepsilon) \leqq \varepsilon$. Wegen $\mu_j(M_j - C_\varepsilon) = \mu_j(\overline{M_j - C_\varepsilon})$ können wir $C_\varepsilon$ aus $\mathfrak{R}_0$ wählen. $D_\varepsilon = M_j - C_\varepsilon$ gehört dann ebenfalls zu $\mathfrak{R}_0$. Da $\chi_{N_j'}$ stetig auf $C_\varepsilon$ ist und nur die Werte 0 und 1 annimmt, ist $\{x : x \in C_\varepsilon \text{ und } \chi_{N_j'}(x) = 1\} \in \mathfrak{R}_0$. Da $\mu_j(N_j') = 0$, hat diese Menge das $\mu_j$-Maß Null; also ist sie nach (17) leer. Dann ist $N_j' \subset D_\varepsilon$ für alle $\varepsilon > 0$. Insbesondere ist $N_j' \subset \bigcap_{n=1}^{\infty} D_{1/n} = D$. $D$ ist abgeschlossen, da alle $D_{1/n}$ abgeschlossen sind, und $\mu_j(D) = 0$, da $\mu_j(D) \leqq \mu_j(D_{1/n}) \leqq 1/n$ für $n = 1, 2, \ldots$. $D$ hat keine inneren Punkte, sonst gäbe es ein $U_0 \in \mathfrak{R}_0$ mit $U_0 \subset D$ und $U_0$ nicht leer und es wäre $0 < \mu_j(U_0) \leqq \mu_j(D) = 0$ (Widerspruch). Also ist $D$ eine nirgends-dichte Menge und damit auch $N_j'$ und erst recht $N_j$, w. z. b. w.

## Literatur

[1] BIRKHOFF, G.: Lattice Theory. Amer. Math. Soc. Colloquium Publication, Vol. 25, New York 1948, Revised Edition. — [2] BOURBAKI, N.: Topologie générale (Fascicule de Résultats). Paris: Hermann & Cie. 1953. — [3] GODEMENT, R.: Sur la théorie des representations unitaires. Ann. of Math. **53**, 68—124 (1951). — [4] HALMOS, P.: Measure Theory. New York: Van Nostrand Comp. 1950. — [5] HALMOS, P.: Introduction to the Hilbert-space. New York: Chelsea Publishing Comp. 1951. — [6] LOOMIS, L.: An introduction to abstract harmonic analysis. New York: Van Nostrand Comp. 1953. — [7] NAGY, B. v. Sz.: Spektraldarstellung linearer Transformationen des Hilbertschen Raumes. Ergeb. d. Math., Bd. 5, H. 5. Berlin: Springer 1942. — [8] NAKANO, H.: Modern spectral theory. Tokyo: Maruzen Co. 1950. — [9] NEUMANN, J. v.: Zur Algebra der Funktionaloperationen und Theorie der normalen Operatoren. Math. Annalen **102**, 370—427 (1930). — [10] NEUMANN, J. v.: On rings of operators. Reduction theory. Ann. of Math. **50**, 401—485 (1949). — [11] STONE, M. H.: The theory of representations for Boolean algebras. Trans. Amer. Math. Soc. **40**, 37—111 (1936). — [12] WALLMAN, H.: Lattices and topological spaces. Ann. of Math. **39**, 112—136 (1938).

Im Literaturverzeichnis sind nur Bücher und Arbeiten aufgeführt, auf die in dieser Arbeit direkt Bezug genommen wird. Weitere Literaturhinweise findet man in der angegebenen Literatur, vor allem in [6].

*Mathematisches Institut der Universität München*

*(Eingegangen am 28. Dezember 1956)*

Chih-Han Sah
Math. Zeitschr. Bd. 68, S. 189—204 (1957)

# On a generalization of finite nilpotent groups

By
Chih-Han Sah

*1. Introduction.* Schmidt [4] and Iwasawa [3] had shown that a group (by which we mean a finite group), all of whose proper subgroups are nilpotent (such a group will be called an $SI$-group), is itself soluble. Iwasawa also proved that unless the order of an $SI$-group is divisible by exactly two distinct primes, it is even nilpotent [3; p. 2, Theorem 2]. In this paper, we shall extend the solubility property of $SI$-groups to a wider class of groups—the class of all semi-nilpotent groups.

A group $G$ is called a semi-nilpotent group if it satisfies either of the following two equivalent conditions:

(A) If $K$ is a non-normal nilpotent subgroup of $G$, then the normalizer of $K$ in $G$ is nilpotent.

(B) If $P$ is a non-normal primary subgroup of $G$, then the normalizer of $P$ in $G$ is nilpotent.

It is clear that (B) is a consequence of (A). To show that (B) implies (A), we let $K$ be a non-normal nilpotent subgroup of $G$. Then, for some prime $p$, the $p$-Sylow subgroup $K_p$ of $K$ is not normal in $G$. But from the fact that $K_p$ is a characteristic subgroup of $K$, we see that $K_p$ is a normal subgroup of the normalizer $N$ of $K$ in $G$. This means that $N$ is a subgroup of the normalizer of $K_p$ in $G$. By (B), this latter group is nilpotent, therefore, $N$ is nilpotent and (A) holds in $G$.

From this definition, we see that all $SI$-groups are semi-nilpotent. Moreover, groups satisfying the condition $(NP)$, to be called $NP$-groups, are also semi-nilpotent.

$(NP)$ If $P$ is a non-normal primary subgroup of $G$, then the normalizer of $P$ in $G$ is also a primary subgroup.

Before we summarize our results in the Main Theorem, we shall recall two nilpotent characteristic subgroups of a group which are important throughout the discussion.

Let $G$ be a group, then the Fitting subgroup $F(G)$ of $G$ is defined to be the product of all the normal nilpotent subgroups of $G$. $F(G)$ is a nilpotent characteristic subgroup of $G$; indeed, it is the largest nilpotent normal subgroup of $G$. We may also define $F(G)$ as the product of all the normal primary subgroups of $G$, or as the direct product of all the subgroups $S_G$, where $S$ ranges over a complete representative set of Sylow subgroups of $G$ and $S_G = \bigcap_{x \in G} x^{-1} S x$. Furthermore, we may write $F(G)$ as the direct product $F_0(G) \otimes F_1(G)$, where $F_0(G)$ is the direct product of all the primary components

of $F(G)$ which are Sylow subgroups of $G$ and $F_1(G)$ is the direct product of all the remaining primary components of $F(G)$. It is clear that $F_0(G)$ is the direct product of all the distinct normal Sylow subgroups of $G$. From this we see that the order of $F_0(G)$ and the index of $F_0(G)$ in $G$ are relatively prime; of course $F_0(G)$ is soluble. By a theorem of SCHUR-WITT-ZASSENHAUS [8; p. 132, Theorem 27], $G$ splits over $F_0(G)$ and all complements of $F_0(G)$ in $G$ are conjugate in $G$.

Again let $G$ be a group, then the hypercenter $H(G)$ of $G$ is defined to be the terminal member of the ascending central chain of the group $G$. $H(G)$ is a nilpotent characteristic subgroup of the group $G$. From a result of BAER [1; p. 40, Theorem 2''], we get that a normal $p$-subgroup $N$ of the group $G$ is part of $H(G)$ if, and only if the index in $G$ of the centralizer of $N$ in $G$ is a power of $p$, where $p$ is a prime. We also notice that a subgroup $A$ of the group $G$ is nilpotent if, and only if $H(G)A$ is nilpotent. The sufficiency of this condition is obvious. The necessity follows from the fact that the ascending central chain of $G$ when connected with the ascending central chain of $H(G)A/H(G)$ is a central chain of the group $H(G)A$. From this we see that $H(G)$ is part of every maximal nilpotent subgroup of the group $G$.

We now collect the main properties of semi-nilpotent groups into the following:

MAIN THEOREM. If $G$ is a semi-nilpotent group, then,

(A) $G/F(G)$ is cyclic.

(B) $F(G)=F_0(G)H(G)$.

(C) If $G$ is not nilpotent, then $\{F(G)\}$ and {normalizers of non-normal Sylow subgroups of $G$} are the complete conjugate classes of maximal nilpotent subgroups of $G$. Moreover, if $A$ and $B$ are two distinct members of the second class, then $G=F(G)A=F(G)B$ and $H(G)=F(G)\cap A=F(G)\cap B=A\cap B$.

(A) shows that semi-nilpotent groups are cyclic extensions of nilpotent groups, hence are themselves soluble groups. (B) shows that in a semi-nilpotent group $G$, a maximal normal primary subgroup is either a Sylow subgroup of $G$ or is part of the hypercenter $H(G)$. (A) and (B) show that unless $G$ is the trivial group, both $F(G)$ and $F_0(G)$ are non-trivial for a semi-nilpotent group $G$. Finally, (A) and (C) show that for any two non-normal Sylow subgroups of a semi-nilpotent group $G$, their normalizers in $G$ are conjugate maximal nilpotent subgroups, and are cyclic extensions of the subgroup $H(G)$.

From the first remark in the preceding paragraph we see that all $SI$-groups are soluble; thus, we obtain the theorem of SCHMIDT and IWASAWA as a corollary.

The remaining part of our investigation is devoted to a study of the structure of semi-nilpotent groups and of $NP$-groups. It will be shown that the structure of a semi-nilpotent group with a trivial center depends on the extension of a primary group $P$ by a cyclic group $A$, where every non-trivial element of $A$ induces an automorphism in $P$ leaving only the identity of $P$ fixed. For convenience, we shall call an automorphism of a group $G$ an

$F$-automorphism, when it leaves only the identity element of $G$ fixed. If a group $A$ of automorphisms of $G$ has the property that every non-trivial element of $A$ is an $F$-automorphism of $G$, then we shall say that $A$ is a group of $F$-automorphisms of $G$. If $G$ and $A$ are related in such fashion, then the extension of $G$ by $A$ effected by embedding $G$ and $A$ into the holomorph of $G$ is called an $F$-pair and written as $(G, A)$. In terms of these definitions, we see that the structure of a semi-nilpotent group with trivial center depends on a primary group $P$ and the extension of $P$ by a cyclic group $A$ of $F$-automorphisms of $P$. If a semi-nilpotent group has a non-trivial center, then its structure may depend on the extension of a primary group by a cyclic primary group belonging to the same prime. In such cases, we know very little about the general structure of the semi-nilpotent group. However, we will see that somewhat better structure theorems may be obtained for $NP$-groups in general.

*2. Notations.* $H \leqq G$ denotes that $H$ is a subgroup of $G$. $H < G$ denotes that $H$ is a proper subgroup of $G$. $H \lhd G$ means that $H$ is a normal subgroup of $G$. $H^x = x^{-1} H x$ is the set of all the elements of the form $y^x = x^{-1} y x$, where $y$ ranges over the subgroup $H$. $N(H < G)$ is normalizer of $H$ in $G$, which consists of all the elements $x$ in $G$ such that $H^x = H$. $C(H < G)$ is the centralizer of $H$ in $G$, which consists of all the elements $x$ in $G$ such that $y^x = y$ for each element $y$ of $H$. $Z(G)$ will denote the center of the group $G$. If $N$ is a nilpotent group, then $N_p$ will be used to denote the $p$-component of $N$; it is also the unique $p$-Sylow subgroup of $N$. If $A$ is a subgroup of the group $G$, then $A_G = \bigcap_{x \in G} A^x$ is the largest normal subgroup of $G$ which is part of $A$. We will use $\prod$ and $\times$ to denote direct product of groups. $\{s, \ldots, t\}$ will denote the subgroup generated by the elements $s, \ldots, t$ of the group $G$. $[G:H]$ will denote the index of the subgroup $H$ in the group $G$. $[x, y] = x^{-1} y^{-1} x y$, and $[K, H]$ is the subgroup generated by the set of all $[x, y]$, where $x$ and $y$ range over the subsets $K$ and $H$ in the group $G$ respectively.

*3. A theorem of Frobenius.* Throughout our discussion, a theorem of Frobenius and some of its consequences will be used. For convenience, we shall list these results in this section.

Theorem of Frobenius. If $G$ is a group, $A \leqq G$ such that $A = N(A < G)$, and $A^x \cap A = 1$ for each element $x$ not in $A$, then, the set of elements in $G$, not contained in any subgroup conjugate to $A$, together with the identity element of $G$ form a normal subgroup $H$ of $G$.

A proof of this theorem may be found in Speiser [*6*; p. 202, Theorem 180]. Although all known proofs of this theorem involve the use of group characters, Shaw [*5*] has given a simple proof under the additional hypothesis that $A$ is soluble. For our purposes, $A$ will not only be soluble, it will even be nilpotent.

If $G$, $A$, and $H$ are related as stated in the theorem of Frobenius, then the following propositions hold:

Proposition A. $G = HA$.

Proposition B. $A$ induces a group of $F$-automorphisms in $H$, hence $Z(G) = 1$.

Proposition C. $([H:1], [A:1]) = 1$, hence a nilpotent subgroup of $G$ either is part of $H$ or has order dividing $[A:1]$.

Proposition D. Any Sylow subgroup of $A$ either is a cyclic group or is a generalized quaternion group.

Proposition E. If $[A:1]$ is even, then $H$ is abelian and every element of $H$ is transformed into its inverse by the element of order 2 in $A$. If $[A:1]$ is odd, then $A$ is soluble. Thus, in all cases, the complements of $H$ in $G$ are conjugate to $A$ in $G$.

Proposition F. $H = [G, H]$. If $H$ is nilpotent, then $H = F(G)$.

Proofs. Proposition A is clear, for it is easy to see that $HA$ contains $H$ and all the conjugates of $A$ in $G$.

Proposition B. Since $H \lhd G$, therefore $A$ induces a group of automorphisms of $H$. If $1 \neq x \in A$ and $y \in H$ such that $y^x = y$, then $x = x^y \in A \cap A^y$. Thus, by the hypothesis on $A$, $y \in H \cap A = 1$. Hence, $A$ induces a group of $F$-automorphisms in $H$ and obviously $Z(G) = 1$.

Proposition C. If we decompose $H$ into conjugate classes with respect to $A$, then except the class containing only the identity element, each class contains exactly $[A:1]$ elements; thus, the first assertion holds. In fact, we may even write $[H:1] \equiv 1 \bmod [A:1]$. The second assertion now follows from the first assertion together with the hypothesis on $H$ and $A$. For an element $x \neq 1$ in $H$ and an element $y \notin H$ must have relatively prime orders; by the hypothesis on $H$ and $A$, $[x, y] \neq 1$. But elements of relatively prime orders must commute in a nilpotent group, [8; p. 113, Theorem 11].

Proposition D. This follows from Proposition B and a result of BURNSIDE [2; p. 335]. More precisely, BURNSIDE had shown that, under our hypothesis, $A$ contains no non-cyclic subgroup of order $p^2$, where $p$ is any prime. Since the center of a non-trivial Sylow subgroup of $A$ contains elements of order a prime, we see easily that a $p$-Sylow subgroup of $A$ contains exactly one subgroup of order $p$. Our result now follows from Theorem 15 [8; p. 118]. It should be noted here that right after the result of BURNSIDE quoted above, BURNSIDE attempted to apply the same method to show that $A$ is a nilpotent group [2; p. 336, Theorem V]. However, ZASSENHAUS [7; p. 198] pointed out that this latter conclusions is false. Unfortunately, the counter-example furnished by ZASSENHAUS contains some misprints. We shall give a modified version of ZASSENHAUS' counter-example here. Let $H$ be the additive group of a vector space of dimension 3 over the prime field of order 43, and let $A$ be the group of linear automorphisms of $H$ generated by the following matrices:

$$a = \begin{pmatrix} 4^3 & 0 & 0 \\ 0 & 4^6 & 0 \\ 0 & 0 & 4^{12} \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4^7 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Since, 4 is a primitive 21-root of unity, we see easily that $a^b = a^2$, $a^7 = b^{3^2} = 1$. It is also easy to see that $A$ induces a group of $F$-automorphisms in $H$, and $A$ is not nilpotent. (It is to be understood that entries of the matrices are reduced mod 43.)

Proposition E. A proof of the first assertion may be found in [7; p. 189]. By applying Theorem 10 [8; p. 145], the second assertion holds. Finally by Proposition C above and by a theorem of SCHUR-WITT-ZASSENHAUS [8; p. 132, Theorem 27], the last assertion holds.

Proposition F. Since $H \lhd G$, we see that $[G, H] \leq H$. Let $1 \neq x \in A$, then we consider the mapping of $H$ into $[G, H]$ induced by sending each element $y$ of $H$ onto the element $[x, y]$ of $[G, H]$. By Proposition B, $x$ induces an $F$-automorphism in $H$; hence, $[x, y] = 1$ if and only if $y = 1$. It is now easy to see that $[x, y] = [x, z]$ implies that $[x, yz^{-1}] = 1$, where $y, z \in H$. Thus, $[G, H]$ contains at least as many elements as $H$. Combining this with the result that $[G, H] \leq H$, we have that $[G, H] = H$. The second assertion is an obvious consequence of Proposition C. It is interesting to notice that, if $A$ is nilpotent, then $H$ is the terminal member of the descending central chain of $G$. This follows immediately from the first assertion and a result of BAER [1; p. 36, (9)]. However, we will not make use of this fact during our discussion.

*4. Maximal nilpotent subgroups of a semi-nilpotent group.* Unless otherwise stated, we shall assume that $G$ is a semi-nilpotent group throughout this section.

LEMMA 4.1. If $A$ and $B$ are two distinct maximal nilpotent subgroups of $G$, then $A \cap B = A_G \cap B_G \lhd G$.

Proof. It is obvious that $A_G \cap B_G \leq A \cap B$. We next fix $A$ and choose $C \neq A$ to be a maximal nilpotent subgroup of $G$ such that $A \cap B \leq A \cap C = D$ and $D$ is maximal with respect to this latter property. We assert that $D \lhd G$. For if $D \not\lhd G$, then $N(D < G)$ would be nilpotent. We may then take $T$ to be a maximal nilpotent subgroup of $G$ such that $N(D < G) \leq T$. Now $D < A$ and $A$ is nilpotent would imply that $N(D < A) > D$, by Theorem 10 [8; p. 111]. Hence, $T \cap A \geq N(D < G) \cap A = N(D < A) > D$, and by the choice of $D$ we would have $T = A$. By a similar argument, we would then get that $D = A \cap C = T \cap C \geq N(D < G) \cap C = N(D < C) > D$. From this contradiction, we get $D \lhd G$. Thus, $D \leq A_G$, hence, $A \cap B \leq A_G$. By symmetry of $A$ and $B$, we then have $A \cap B \leq A_G \cap B_G$. Therefore, $A \cap B = A_G \cap B_G \lhd G$. Q. E. D.

LEMMA 4.2. If $S$ is a nilpotent subgroup of $G$ such that $([G:S], [S:1]) = 1$, and if $P \lhd S$ but $P \not\lhd G$, then $N(P < G)$ is a maximal nilpotent subgroup of $G$. On the other hand, if $A$ is a maximal nilpotent subgroup of $G$, $B \lhd A$, and $B \not\lhd G$, then $A = N(B < G)$. In addition, if $([A:B], [B:1]) = 1$, and $B_p \not\lhd G$ for each prime $p$, $p \mid [B:1]$, then $([G:B], [B:1]) = 1$.

Proof. Let $S$ and $P$ satisfy the first hypothesis. Since $P \not\lhd G$, $N(P < G)$ is therefore nilpotent. Let $T$ be any nilpotent subgroup of $G$ such that $N(P < G) \leq T$, then $P \lhd S$ implies that $S \leq N(P < G) \leq T$. From $T$ is nilpotent and $([G:S], [S:1]) = 1$, we conclude that $S$ is a direct factor of $T$. Hence, $P \lhd T$ and $T \leq N(P < G)$. Therefore, $T = N(P < G)$ and $N(P < G)$ is a maximal nilpotent subgroup of $G$.

If $A$ is a maximal nilpotent subgroup of $G$, $B \lhd A$, and $B \not\lhd G$, then $N(B < G)$ is nilpotent and $A \leq N(B < G)$. By the maximal nilpotency of $A$,

we see that $A = N(B < G)$. Finally, if $([A:B], [B:1]) = 1$ and $B_p \lhd G$ for each prime $p$, $p \mid [B:1]$, then $B_p = A_p$ by the choice of $B$. Applying the preceding result, we have $A = N(B_p < G)$. Let $S$ be a $p$-Sylow subgroup of $G$ such that $B_p \leq S$, then we have that $N(B_p < S) = N(B_p < G) \cap S = A \cap S = A_p = B_p$. Thus, $B_p$ must be equal to the $p$-Sylow subgroup $S$ of $G$. From this we get $([G:B], [B:1]) = 1$. Q. E. D.

COROLLARY. If $A$ is a maximal nilpotent subgroup of $G$ and $x \notin A$, then $A \cap A^x = A_G$. If $S$ is a nilpotent subgroup of $G$ such that $([G:S], [S:1]) = 1$ and $x \notin N(S < G)$, then $S_G = S \cap S^x = [N(S < G)]_G \cap S$.

Proof. Let $A$ be a maximal subgroup of $G$. If $A \lhd G$, then $A \cap A^x = A = A_G$. If $A \not\lhd G$, then by Lemma 4.2, $A$ and $A^x$ are distinct maximal nilpotent subgroups of $G$. By Lemma 4.1, we then have $A \cap A^x = A_G$.

Let $S$ be a nilpotent subgroup of $G$ such that $([G:S], [S:1]) = 1$, and $x \notin N(S < G)$, then applying Lemma 4.2 to $S$ we get that $N(S < G)$ is a maximal nilpotent subgroup of $G$. Since $S$ is a characteristic subgroup of $N(S < G)$ and $S \not\lhd G$, therefore $N(S < G)$ is its own normalizer in $G$. From the hypothesis on $S$, it is clear that the $p$-component of $S$ is the $p$-component of $N(S < G)$. From Lemma 4.2 applied to $N(S < G)$, we see that the $p$-component of $N(S < G)$ is either a normal subgroup of $G$ or a $p$-Sylow subgroup of $G$; since $N(S < G)$ is nilpotent, we get the result $S_G = [N(S < G)]_G \cap S$. From this we obtain $S \cap S^x = [N(S < G)] \cap [N(S^x < G)] \cap S \cap S^x = [N(S < G)] \cap [N(S < G)]^x \cap S \cap S^x = [N(S < G)]_G \cap S \cap S^x = S_G \cap S^x = S_G$. Q. E. D.

LEMMA 4.3. If $A$ is a maximal nilpotent subgroup of $G$, then there is a unique subgroup $A'$ of $G$ satisfying the following conditions:

(a) $A' \lhd G$.

(b) $A'A = G$.

(c) $A' \cap A = A_G$.

(d) $A' \geq F(G)$.

Proof. If $A \lhd G$, then $G$ is a subgroup satisfying all the conditions in the lemma. From $A \lhd G$, we have that $A' \cap A = A_G = A$, or $A \leq A'$. Thus, (b) shows that $G$ is the only subgroup that will satisfy all four conditions. If $A \lhd G$, then by Lemma 4.2, we have that $N(A/A_G < G/A_G) = N(A < G)/A_G = A/A_G$. From Corollary of Lemma 4.2, we have $A^x/A_G \cap A/A_G = 1$ for $x \notin A$. Now applying the theorem of FROBENIUS to the group $G/A_G$, we get that there is a unique subgroup $A'$ of $G$ satisfying the conditions (a), (b), and (c). Let $P$ be a normal $p$-subgroup of $G$. If $P \leq A_G$, then $P \leq A'$. If $P \not\leq A_G$, then $A_G P/A_G$ is a normal $p$-subgroup of $G/A_G$. From Proposition C and the fact that $A/A_G$ contains only the trivial normal subgroup of $G/A_G$, we see that $A_G P/A_G \leq A'/A_G$. Consequently, $P \leq A'$. Since $F(G)$ is the product of all such subgroups $P$ for different primes, we get that $F(G) \leq A'$. Q.E.D.

THEOREM 1. If $G$ is a semi-nilpotent group, then $G/F_0(G)$ is nilpotent.

Proof. We shall first show that $G/F(G)$ is nilpotent. Let $\{S_i \mid 1 \leq i \leq n\}$ be a representative set of the set of all non-normal Sylow subgroups of $G$. If this set is empty, then $G$ is nilpotent and we have nothing to prove. Assume

that $n \geqq 1$, then by Lemma 4.2, $A_i = N(S_i < G) < G$ is a maximal nilpotent subgroup of $G$ and $A_i = N(A_i < G)$, $1 \leqq i \leqq n$. By Lemma 4.3, there is a subgroup $A_i' \lhd G$ such that $A_i' A_i = G$, $A_i' \cap A_i = (A_i)_G$, and $A_i' \geqq F(G)$, $1 \leqq i \leqq n$. Obviously, each $G/A_i'$ is a nilpotent group, hence, $D = \prod_{1 \leqq i \leqq n} G/A_i'$ is also nilpotent. We now map $G$ into $D$ by sending an element $x$ onto the element $(A_1' x, \ldots, A_n' x)$. This map is a homomorphism with the kernel $K = \bigcap_{1 \leqq i \leqq n} A_i' \geqq F(G)$. If $K > F(G)$, then $K$ is not nilpotent, for $F(G)$ is the largest nilpotent normal subgroup of $G$. Thus, for some prime $p$, there is a $p$-Sylow subgroup $T$ of $K$ such that $T \lhd K$. Hence, $T > T_G = [F(G)]_p$. Let $S$ be a $p$-Sylow subgroup of $G$ such that $T \leqq S$. Then, $S \not\lhd G$, since $S_G = [F(G)]_p < S$. Thus, $S$ is conjugate to some $S_i$, $1 \leqq i \leqq n$. Say, $S^x = S_i$. Then, by the Corollary of Lemma 4.2, we get that $S_G = T_G < T^x = (K \cap S)^x = K \cap S_i = K \cap A_i' \cap S_i = K \cap (S_i)_G = (S_i)_G = S_G$, where the third equality holds because $K \lhd G$. This contradiction shows that $K = F(G)$, hence $G/F(G)$ is nilpotent.

Next, we shall show that if $A$ is a maximal nilpotent subgroup of $G$ and $A \lhd G$, then $G = F(G) A$. From $A \lhd G$, we get that $A_p \lhd G$ for some prime $p$. By Lemma 4.2, $A_p$ is a $p$-Sylow subgroup of $G$ and $A = N(A_p < G)$. Since $F(G) A_p / F(G)$ is a $p$-Sylow subgroup of the nilpotent group $G/F(G)$, we see that $F(G) A_p \lhd G$. Then, from the fact that $A_p$ is a $p$-Sylow subgroup of $G$, we have that $G = N(F(G) A_p < G) = F(G) N(A_p < G) = F(G) A$.

If we collect all the distinct primary components of $A$ which are not normal in $G$ and form their direct product $B$, then it is immediate that $G = F(G) B$. $([G:B], [B:1]) = 1$ now holds by Lemma 4.2. If $P$ is a $p$-Sylow subgroup of $G$ and $(p, [B:1]) = 1$, then from the fact that $G/F(G)$ is isomorphic with a factor group of $B$, we get that $F(G) P/F(G)$ is the identity subgroup. Thus $P$ is the $p$-component of $F(G)$, or $P \lhd G$. From this we get that $G = F_0(G) B$; hence, $G/F_0(G)$ is nilpotent. Indeed, $B$ is a complement of $F_0(G)$ in $G$. Q. E. D.

Corollary. If $A$ is a maximal nilpotent subgroup of $G$ such that $A \lhd G$, then $G = F(G) A$ and $F(G) \cap A = A_G$.

Proof. The first assertion has been proved above. For the second assertion, we have clearly that $A_G \leqq F(G)$. Applying Lemma 4.3 to $G$, we have $A_G \leqq F(G) \cap A \leqq A' \cap A = A_G$. Indeed, by the uniqueness of $A'$, we have that $A' = F(G)$. Q. E. D.

Theorem 2. If $G$ is a semi-nilpotent group, then:

(a) $F(G)$ is a maximal nilpotent subgroup of $G$.

(b) If $A$ is a maximal nilpotent subgroup of $G$ and $A \not\lhd G$, then $A_G = H(G)$.

(c) The set, $\{N(S < G) \mid S$ is a non-normal Sylow subgroup of $G\}$, is the only complete set of conjugate maximal nilpotent subgroups of $G$ outside of the set $\{F(G)\}$.

(d) If $A$ is a maximal nilpotent subgroup of $G$ and $A \not\lhd G$, then $G/H(G)$ is the $F$-pair $(F(G)/H(G), A/H(G))$.

Proof. If $G$ is nilpotent, then (a) is trivial, while (b), (c), and (d) hold vacuously. Hence, we may assume that $G$ is not nilpotent.

(a) Let $A$ be a maximal nilpotent subgroup of $G$ such that $A \lhd\!\lhd G$. Such subgroup exists by Lemma 4.2 and the hypothesis that $G$ is not nilpotent. Then by the Corollary of Theorem 1 and Lemma 4.3, we see that $G/A_G$ is the $F$-pair $(F(G)/A_G, A/A_G)$. By Proposition C we see that if $T > F(G)$, then $T/A_G$ is not nilpotent. Thus, $T$ is not nilpotent, and $F(G)$ is a maximal nilpotent subgroup of $G$.

(b) For each prime $p$, $(A_G)_p$ is a normal $p$-subgroup of the group $G$, since it is a characteristic subgroup of the normal subgroup $A_G$ of the group $G$. If $B$ and $C$ are the $p$-complements in $A$ and in $F(G)$ respectively, then $C \lhd G$, since $C$ is a characteristic subgroup of the characteristic subgroup $F(G)$ of $G$. Furthermore, $CB \leqq C\left((A_G)_p < G\right)$, since $(A_G)_p$ is part of the $p$-components of the nilpotent groups $A$ and $F(G)$. Thus, $\left[G : C\left((A_G)_p < G\right)\right]$ is a divisor of $[G:CB]$. But, we have that $[G:CB] = [G:F(G)B]\,[F(G)B:CB]$, and, by the Corollary of Theorem 1, that $G = F(G)A$. Hence, $[G:F(G)B] \mid [A:B]$ and $[F(G)B:CB] \mid [F(G):C]$. Since both $[A:B]$ and $[F(G):C]$ are powers of the prime $p$ by the definition of $B$ and $C$, we see that $\left[G : C\left((A_G)_p < G\right)\right]$ is a power of $p$. Therefore, $(A_G)_p \leqq H(G)$ by a remark in the introduction. Since $p$ is arbitrary, we see that $A_G \leqq H(G)$. Since we already know that $H(G)$ is part of every maximal nilpotent subgroup, we also have that $H(G) \leqq A_G$. Thus, $A_G = H(G)$.

(a) and (b) together give us the result (d) immediately.

(c) By Lemma 4.2, it is immediate that the set under consideration consists of exactly all the maximal nilpotent subgroups of $G$ which are not normal subgroups of $G$. Let $A$ be one of these subgroups, then (d) above and Proposition E give us the result (c) immediately. Q. E. D.

COROLLARY. $F(G) = F_0(G)\,H(G)$.

Proof. According to our decomposition of $F(G)$ into the direct product of $F_0(G)$ and $F_1(G)$ in the introduction, it suffices to show that $F_1(G) \leqq H(G)$. Let $P$ be a primary component of $F_1(G)$, then $P$ is not a Sylow subgroup of the group $G$. Let $S$ be a Sylow subgroup of $G$ such that $P \leqq S$, then $P = S_G < S$. Hence, $A = N(S < G)$ is a maximal nilpotent subgroup of $G$ and $A \lhd\!\lhd G$, by Lemma 4.2. By Theorem 2 we then have $P \leqq A_G = H(G)$, since $P \lhd G$. Thus, $F_1(G) \leqq H(G)$, since $p$ may be chosen arbitrarily. Q.E.D.

*5. General structure of semi-nilpotent groups.*

THEOREM 3. If $G$ is a semi-nilpotent group, then every subgroup and every homomorphic image of $G$ is semi-nilpotent.

Proof. Let $G$ be a semi-nilpotent group and $K \leqq G$. If $S$ is a non-normal nilpotent subgroup of $K$, then $S$ is a non-normal nilpotent subgroup of $G$. Hence, $N(S<G)$ is nilpotent and $N(S<K) = N(S<G) \cap K$ is also nilpotent. Therefore, $K$ is semi-nilpotent.

By an inductive argument, we see that in order to prove the second assertion, it suffices to prove that $G/M$ is semi-nilpotent, where $M$ is a

minimal normal subgroup of the semi-nilpotent group $G$. By Theorem 1, $G$ is soluble, therefore $M$ is an elementary abelian $p$-group for some prime $p$ by applying Theorem 2 [8; p. 81]. Let $P/M$ be a non-normal primary subgroup of $G/M$, then, $N(P/M<G/M)=N(P<G)/M$. If $P/M$ is a $p$-group, then $P$ is a non-normal $p$-subgroup of $G$; hence, $N(P<G)$ is nilpotent and $N(P/M<G/M)$ is nilpotent. If $P/M$ is a $q$-group, $q\neq p$, then $P=MQ$, where $Q$ is a $q$-Sylow subgroup of $P$ and $Q \not\lhd G$. Therefore $N(Q<G)$ is nilpotent and $N(P/M<G/M)=N(P<G)/M=MN(Q<G)/M$ is also nilpotent. Thus, $G/M$ is semi-nilpotent. Q. E. D.

We will make the remark here that under the hypothesis that every proper subgroup and every proper homomorphic image of the group $G$ is semi-nilpotent, we cannot conclude that $G$ is semi-nilpotent. Indeed, $G$ may not be soluble, as the alternating symmetric group on five symbols shows.

THEOREM 4. (a) If $G$ is a semi-nilpotent group and $G=A\otimes B$, where $B$ is not nilpotent, then $A$ is either hamiltonian or abelian.

(b) Let $H$ and $K$ be semi-nilpotent groups of relatively prime orders, then, $H\otimes K=G$ is semi-nilpotent if, and only if either both $H$ and $K$ are nilpotent or at least one of the two is hamiltonian or abelian.

Proof. (a) If $G=A\otimes B$ is a semi-nilpotent group and $B$ is not nilpotent, then we let $S$ be any cyclic subgroup of $A$. $B\leq N(S<G)$ and $B$ is not nilpotent imply that $N(S<G)$ is not nilpotent. Thus, $S\lhd G$, or $S\lhd A$, and $A$ is either hamiltonian or abelian. Moreover, $A\leq H(G)$.

(b) Let $H$ and $K$ be semi-nilpotent groups of relatively prime orders, then by (a) the condition on $H$ and $K$ is necessary for $G$ to be semi-nilpotent. Conversely, if $H$ and $K$ are both nilpotent, then $G$ is nilpotent, hence semi-nilpotent, in any case. If $H$ is hamiltonian or abelian, then every non-normal primary subgroup $P$ of $G$ is a non-normal primary subgroup of $K$; thus, $N(P<K)$ is nilpotent by the semi-nilpotency of $K$. Then, $N(P<G)=H\otimes N(P<K)$ is nilpotent and $G$ is semi-nilpotent. Q. E. D.

LEMMA 5.1. If $G$ is a semi-nilpotent group and $H(G)$ contains a $p$-subgroup $P$ such that $P\not\lhd G$, then $G/F(G)$ is a $p$-group. Thus, if $G$ is not nilpotent, then every subgroup in the $p$-complement of $H(G)$ is normal subgroup of the group $G$.

Proof. Let $H(G)=\prod H_q$, where $H_q=[H(G)]_q$, then $P\leq H_p$. Clearly, $C(H_p<G)\leq N(P<G)$ and $N(P<G)$ is nilpotent. Therefore, $C(H_p<G)$ is nilpotent. From $H_p\lhd G$, we get $C(H_p<G)\lhd G$; hence, $C(H_p<G)\leq F(G)$. Since $[G:C(H_p<G)]$ is a power of $p$ from a remark in the introduction, we see that $[G:F(G)]$ is a power of $p$. Q. E. D.

It is also clear that if a Sylow subgroup of $G$ is contained in the $p$-complement of $H(G)$, then it is a direct factor of $G$. This fact, indeed, holds for every group $G$, see BAER [1; p. 41, Corollary 2].

LEMMA 5.2. If $G$ is semi-nilpotent and $A$ is a maximal nilpotent subgroup of the group $G$, then $A/A_G$ is a cyclic group.

Proof. If either $G$ is nilpotent or $A \lhd G$, then we have nothing to prove. Hence, we assume that $G$ is not nilpotent and $A \lhd\!\!\!\cdot\, G$, then, $A_G = H(G)$ by Theorem 2(b). From Theorem 3, we may assume that $H(G) = 1$, and try to prove that $A$ is cyclic under these conditions. Then, from Theorem 2(d), we see that $G$ is the $F$-pair $(F(G), A) = (F_0(G), A)$. From Proposition D and the fact that $A$ is nilpotent, we see that $A$ is either a cyclic group or the direct product of a cyclic group of odd order with a generalized quaternion group. We shall now show that the last case does not occur by proving that $A$ is cyclic when $[A:1]$ is even. Suppose that $[A:1]$ is even and $x$ is an element of order 2 in $A$. Let $1 \neq y \in F(G)$ be an element of order $q$. Then by Proposition E, we see that $\{y, x\}$ is the dihedral group of order $2q$, [6; p. 22], which is not nilpotent, because $q$ is odd. Since $\{y, x\} \leqq N(M < G)$, where $M = \{y\}$, therefore, $M \lhd G$. It is now clear that $MA$ is an $F$-pair $(M, A)$, $A$ is isomorphic to a subgroup of the automorphism group of $M$, and $M$ is a cyclic group of odd order; hence, $A$ is cyclic, [8; p. 115]. Q. E. D.

COROLLARY. If $G$ is semi-nilpotent, then $G/F(G)$ is cyclic.

Proof. By Corollary of Theorem 1, (b) of Theorem 2, Second Isomorphism Theorem [8; p. 34], and Lemma 5.2.

We shall now introduce the following definitions: An $F$-pair $(H, A)$ is called a special $F$-pair, if $H$ is a nilpotent group and $A$ is a cyclic group. If $A$ is representable as a subgroup of the automorphism group of an arbitrary group $G$, then we shall say that a subgroup $S$ of $G$ is an $A$-sub-admissible subgroup of $G$ when $S$ admits a non-trivial subgroup of $A$ as a group of automorphisms. Finally, if we are given a set of $F$-pairs, $\{(S_i, A_i) \mid 1 \leqq i \leqq n\}$, such that each $A_i$ is isomorphic to a group $A$ under a given isomorphism, $\vartheta_i$, then we form the direct product $S = \prod_{1 \leqq i \leqq n} S_i$, and let $A$ operate on $S$ by defining the action of an element $x$ of $A$ on each of the component $S_i$ of $S$ to be that of $x\vartheta_i^{-1}$ of $A_i$. It is clear that by going over to the holomorph of $S$, we would obtain an $F$-pair $(S, A)$. Such an $F$-pair $(F, A)$ will be called the amalgamated product of $(S_i, A_i)$ under $\vartheta_i$.

THEOREM 5. $G$ is a semi-nilpotent group with $Z(G) = 1$ if, and only if the following conditions hold in $G$:

(1) There is a subgroup $A$ of $G$ such that $G$ is the special $F$-pair $(F(G), A) = (F_0(G), A)$.

(2) Every $A$-sub-admissible subgroup of $F(G)$ is normal in $G$.

Proof. If $G$ is a semi-nilpotent group with $Z(G) = 1$, then $G$ is not nilpotent. Let $A$ be a maximal nilpotent subgroup of $G$ and $A \lhd\!\!\!\cdot\, G$, such subgroups exist by Lemma 4.2. From (b) and (d) of Theorem 2 and Lemma 5.2, we see that $G$ is the special $F$-pair $(F(G), A)$. $F(G) = F_0(G)$ is a consequence of Proposition C, thus, (1) is necessary. If $S$ is any $A$-sub-admissible subgroup of $F(G)$, then by Proposition C, $N(S < G)$ is not nilpotent. Thus, by the semi-nilpotency of the group $G$, $S \lhd G$. Hence, (2) is also necessary.

Conversely, if conditions (1) and (2) are satisfied by the group $G$, and $P$ is a non-normal primary subgroup of $G$, then either $P$ is part of $F(G)$, or it

is conjugate to a subgroup of $A$, by condition (1) and Proposition C. If $P \leq F(G)$ and $N(P<G)$ is not part of $F(G)$, then $N(P<G)$ contains a subgroup conjugate to a non-trivial subgroup of $A$. This means that a conjugate $P^x$ of $P$ is $A$-sub-admissible, therefore, by condition (2), $P^x \lhd G$; thus, $P \lhd G$. This contradiction shows that $N(P<G) \leq F(G)$, hence, $N(P<G)$ is nilpotent. On the other hand, if $P$ is conjugate to a subgroup $P^x$ of $A$, then $N(P^x<G) \geq A$. If $N(P^x<G)>A$, then $1<S=N(P^x<G) \cap F(G)$. It is clear that $S \lhd N(P^x<G)$ and $S \leq C(P^x<G)$. However, this latter is impossible in any $F$-pair, since $S$ and $P^x$ would generate a nilpotent subgroup with order not dividing either $[F(G):1]$ or $[A:1]$, contradicting Proposition C. Thus, $N(P^x<G)=[N(P<G)]^x = A$, or $N(P<G)$ is a cyclic group. Therefore, $G$ is semi-nilpotent. $Z(G)=1$ is immediate by Proposition B together with the condition (1). Q. E. D.

We may also put Theorem 5 into the following form:

THEOREM 5′. *$G$ is a semi-nilpotent group with $Z(G)=1$ if, and only if the following conditions hold in $G$:*

(1) *There is a subgroup $A$ of $G$ such that $G$ is the amalgamated product of the special $F$-pairs $(S_i, A)$ under the identity automorphism of $A$, where $S_i$ ranges over the set of all the distinct normal Sylow subgroups of $G$.*

(2) *For each $i$, every $A$-sub-admissible subgroup of $S_i$ is normal in $(S_i, A)$.*

Proof. The necessity of these conditions is obvious from Theorem 5, once we recall that $F_0(G)=\prod_i S_i$.

Conversely, if conditions (1) and (2) are satisfied, we shall show that conditions (1) and (2) of Theorem 5 then hold. Clearly, condition (1) of Theorem 5 is a consequence of the condition (1) above, since $F_0(G)=\prod_i S_i$, where $S_i$ ranges over the distinct normal Sylow subgroups of $G$. We next notice that $P \leq S_i$ and $P \lhd (S_i, A)$ imply that $P \lhd G$, since $S_j \leq N(P<G)$ for each $j \neq i$ and $G=(\prod_{j \neq i} S_j)(S_i, A)$. Hence, condition (2) of Theorem 5 hold, for an $A$-sub-admissible subgroup $T$ of $F(G)=F_0(G)$ is the direct product of $T \cap S_i$, and each $T \cap S_i$ is an $A$-sub-admissible subgroup of $S_i$. Q. E. D.

THEOREM 6. *Let $G$ be a group such that every subgroup of $H(G)$ is normal in $G$, then $G$ is semi-nilpotent if, and only if the following conditions hold:*

(1) *There is a subgroup $A$ of $G$ such that $G/H(G)$ is the special $F$-pair $\big(F(G)/H(G), A/H(G)\big)$.*

(2) *If $S \lhd G$ and $H(G)\,S/H(G)$ is an $A/H(G)$-sub-admissible subgroup of $F(G)/H(G)$, then $N(S<G) \leq F(G)$.*

If these conditions hold in $G$, then $H(G)$ is part of the first, or part of the second member of the ascending central chain of $F(G)$, [8; p. 110], according as $H(G)$ is abelian or hamiltonian. Furthermore, the ascending central chain of $G$, [8; p. 110], terminates with $H(G)$ after at most $m$ steps, where $m=\max_i m_i$, $m_i$ is the least positive integer such that every element of the $p_i$-primary component of $H(G)$ has an order dividing $(p_i)^{m_i}$.

Proof. If $G$ is a nilpotent group, then the theorem is trivial. Since our hypothesis implies that $G$ is either hamiltonian or abelian. We now assume that $G$ is not nilpotent and that every subgroup of $H(G)$ is normal in $G$.

If $G$ is semi-nilpotent, then (1) is a consequence of Theorems 3 and 5. Let $S \lhd\!\!\lhd G$ and $H(G)\,S/H(G)$ be an $A/H(G)$-sub-admissible subgroup of $F(G)/H(G)$, then $N(S<G)$ is nilpotent; hence, $H(G)\,N(S<G)/H(G)$ is nilpotent and has a non-trivial intersection with $F(G)/H(G)$. From Proposition C applied to (1), we see that $H(G)\,N(S<G)/H(G)$ is part of $F(G)/H(G)$, or $N(S<G) \leqq F(G)$. Thus, condition (2) holds.

Conversely, if $G$ satisfies the conditions (1) and (2) in addition to the conditions stated at the beginning of this proof, then we let $P$ be any non-normal $p$-subgroup of $G$ for a prime $p$. It is clear that $P \not\leqq H(G)$. Thus, we see that $H(G)\,P/H(G)$ is a non-trivial $p$-subgroup of $G/H(G)$. If $H(G)\,P/H(G)$ is an $A/H(G)$-sub-admissible subgroup of $F(G)/H(G)$, then by (2), $N(S<G)$ is nilpotent. If $H(G)\,P/H(G)$ is a subgroup of $F(G)/H(G)$ which is not $A/H(G)$-sub-admissible, then we have the result, $F(G)/H(G) \geqq N[H(G)\,P/H(G) < G/H(G)] = N[H(G)\,P<G]/H(G) \geqq H(G)\,N(P<G)/H(G)$, or $N(P<G) \leqq F(G)$, hence $N(P<G)$ is nilpotent. For, in an $F$-pair $G=(K, A)$, $S \leqq K$ and $N(S<G) \not\leqq K$ imply that a conjugate of $S$ is $A$-sub-admissible. Now by (1), using Proposition C, the only other alternative is that $H(G)\,P/H(G)$ is conjugate to a subgroup of $A/H(G)$. Repeating the proof of Theorem 5, we have $A^x/H(G) = N[H(G)\,P/H(G) < G/H(G)] = N[H(G)\,P<G]/H(G) \geqq H(G)\,N(P<G)/H(G)$, or $N(P<G) \leqq A^x$, hence, $N(P<G)$ is nilpotent. Thus, $G$ is semi-nilpotent.

For the remaining parts of the theorem, we see first that $F(G) = H(G) \cdot [G, F(G)]$ by Proposition F. Since every cyclic subgroup of $H(G)$ is normal in $G$ and the automorphism group of a cyclic group is always abelian [8; p. 115], we see that $[[G, F(G)], H(G)] = 1$. If $H(G)$ is abelian, then $[F(G), H(G)] = 1$, or $H(G) \leqq Z[F(G)]$. If $H(G)$ is hamiltonian, then $[F(G), H(G)] = [H(G), H(G)] \leqq Z[H(G)] \leqq Z[F(G)]$. For the last assertion of the theorem, it suffices to show that every element of order a prime in $H(G)$ is in $Z(G)$ and apply an induction argument to $G/Z(G)$, using Theorem 3. If $x \in H(G)$ is an element of order a prime $p$, then every element of $G$ with order prime to $p$ commutes with $x$ [1; p. 38, Theorem 1]. In addition, since $\{x\} \lhd G$, every element in $G$ with order a power of $p$ must also commute with $x$, because the automorphism group of $\{x\}$ contains no element of order a proper power of $p$. Thus, $x \in Z(G)$. Q. E. D.

By (b) of Theorem 4, it is easily seen that condition (2) of Theorem 6 is indispensable. Furthermore, it can be shown that the condition (2) amounts to nothing more than the condition:

(2′) If $S \lhd\!\!\lhd G$ and $S \leqq F(G)$, then $N(S<G)$ is nilpotent. Thus, (2) is not a very satisfactory condition.

Lemma 5.1 in a sense is the counterpart of the result of IWASAWA mentioned in the introduction—if the order of a group $G$ has more than two distinct prime divisors, then $G$ is an $SI$-group if and only if $G$ is nilpotent.

For Lemma 5.1 is clearly equivalent to the statement that, if $H(G)$ contains non-normal primary subgroups of $G$ for more than one prime, then $G$ is a semi-nilpotent group if and only if $G$ is nilpotent.

If $H(G)$ contains non-normal primary subgroup for the prime $p$ only, then Lemma 5.1 shows that $G$ is an extension of the nilpotent group $F(G)$ by a cyclic $p$-group. Here we run into the problem of having to extent a $p$-group $[F(G)]_p$ by a cyclic $p$-group. Thus, the structure of semi-nilpotent groups with non-trivial centers is much more complicated than that of semi-nilpotent groups with trivial centers.

*6. General structure of $NP$-groups.* We shall now show that somewhat better structure theorems may be obtained for $NP$-groups. However, it is to be expected that the basic structure of $NP$-groups should not differ too much from that of the semi-nilpotent groups, since their definitions are quite similar.

If we replace the word "semi-nilpotent" and "nilpotent" respectively by the words "$NP$-" and "primary" throughout Theorem 3 and its proof, we obtain the result that every subgroup and every homomorphic image of an $NP$-group is again an $NP$-group.

LEMMA 6.1. Let $G$ be an $NP$-group and $H$ be a nilpotent subgroup of $G$. If $H$ is not primary, then every subgroup of $H$ is normal in $G$.

Proof. It suffices to show that every cyclic primary subgroup $P$ of $H$ is normal in $G$. Since $H$ is nilpotent and not primary, $N(P<G)$ is not primary. Thus, by property $(NP)$ of $G$, $P \lhd G$. Q. E. D.

THEOREM 7. $G$ is a nilpotent $NP$-group if, and only if $G$ is either an abelian group, a hamiltonian group, or a primary group.

Proof. Apply the property $(NP)$ and Lemma 6.1 to $G$. Q. E. D.

THEOREM 8. $G$ is an $NP$-group with $Z(G) = 1$ if, and only if the following conditions hold:

(1) $G$ is the special $F$-pair $(F(G), A) = (F_0(G), A)$, where $A$ is a $p$-Sylow subgroup of $G$ and $p$ is the unique prime divisor of $[G:F(G)]$.

(2) If $F(G)$ is primary, then every $A$-sub-admissible subgroup of $F(G)$ is normal in $G$.

(3) If $F(G)$ is not primary, then every subgroup of $F(G)$ is normal in $G$. Indeed, $G$ is isomorphic to a group defined by the following set of relations on the generators $x_1, \ldots, x_m$, and $a$:

$$[x_i, x_j] = (x_i)^{n_i} = 1 = a^{p^n},\ n_i \mid n_j \text{ for } i > j,\ 1 \leq i, j \leq m;$$

$$a^{-1} x_i a = (x_i)^k,\ 1 \leq i \leq m,\ k^{p^n} \equiv 1 \bmod n_1 \ (k \text{ is primitive});$$

$$[G:F(G)] = p^n,\ p^n \mid (q-1) \text{ where } q \text{ is any prime divisor of } [F(G):1];$$

$$n_1 \ldots n_m = [F(G):1].$$

Proof. If $G$ is an $NP$-group with $Z(G) = 1$, then by (1) of Theorem 5 we get the first part of (1) above; the second part of (1) follows immediately from Lemma 6.1 and the fact that $A \not\lhd G$.

Condition (2) of Theorem 8 is necessary by (2) of Theorem 5.

The first part of (3) in Theorem 8 is necessary by Lemma 6.1. If we let $S$ be a cyclic subgroup of $F(G)$ with order a prime $q$, then it is easy to see that $S$ and $A$ generates an $F$-pair $(S, A)$; hence, the restriction on $p^n = [A:1] = [G:F(G)]$ is necessary. From this we see that 2 is not a divisor of $[F(G):1]$, hence $F(G)$ must be an abelian group [8; p. 130]. By using (1) and the first assertion of (3) in Theorem 8, we then see easily that the defining relations among the generators of $G$ must be of the form stated in the second part of (3), where $F(G) = \{x_1, \ldots, x_m\}$ and $A = \{a\}$.

Conversely, if $G$ satisfies the conditions (1), (2), and (3), then from Proposition B, $Z(G) = 1$. If $P$ is a non-normal primary subgroup of $G$, then $P$ is either a subgroup of $F(G)$ or conjugate to a subgroup of $A$. If $P \leq F(G)$, then (2) shows that $N(P < G) \leq F(G)$, hence $N(P < G)$ is primary, by the same argument as in Theorem 5. If $P$ is conjugate to a subgroup of $A$, again using the same argument as in Theorem 5, we see that $N(P < G)$ is conjugate to $A$, hence it is primary by (1). Q. E. D.

We will now characterize completely $NP$-groups $G$ such that $1 < H(G) < G$. By Lemma 6.1 and (c) of Theorem 2, we see that non-normal maximal nilpotent subgroups of $G$ are the $p$-Sylow subgroups of $G$, where $p$ is the unique prime divisor of $[G:F(G)]$. It is clear that $F(G) = F_0(G) \otimes H(G)$ and by hypothesis $F(G)$ is not primary. From Lemma 6.1 we see that every subgroup of $F(G)$ is normal in $G$. We now see that $G$ may be considered as an extension of the abelian group $F_0(G)$ by a $p$-group $A$, since $F_0(G)$ may not contain any element of order 2. $A$ is a Sylow subgroup of $G$ such that the subgroup $H(G) \leq A$ induces the identity automorphism in $F_0(G)$ and $A/H(G)$ is cyclic of order $[G:F(G)]$.

It is now easy to see that the relations given in (3) of Theorem 8 may be used as part of the defining relations in $G$ with the following modifications: the element $a$ has order a power of $p$ which is divisible by $p^n$; except for the condition $[G:F(G)] = p^n$, other occurrences of $F(G)$ are replaced by $F_0(G)$. Equivalently, what we have in (3) of Theorem 8 are the defining relations in $G/H(G)$, except that congruence modulo $H(G)$ needs only be used in $a^{p^n} = 1$, while equality actually holds for each of the remaining relations. Thus, for given $G/H(G)$, the structure of $G$ depends only on the structure of $A$ as an extension of $H(G)$, a $p$-group, by a cyclic $p$-group of order $p^n$ such that every subgroup of $H(G)$ is normal in $A$.

We now consider the possibilities that $H(G)$ is hamiltonian and that it is abelian.

If $H(G)$ is hamiltonian, then $H(G) = Q \otimes T$, where $Q$ is a quaternion group and $T$ is an elementary abelian 2-group [8; p. 130]. It is then a simple matter to show that $A = \{H(G), a\}$, where $a$ commutes with every element of $H(G)$, and $A$ is determined up to isomorphism by any one of the following three relations: $a^{2^n} = 1$; $a^{2^n}$ is the element of order 2 in $Q$; and when $T > 1$, $a^{2^n}$ is an element of order 2 in $T$.

If $H(G)$ is abelian with the independent generators $y_i$, $1 \leq i \leq d$, satisfying the relations: $[y_i, y_j] = (y_i)^{p^{k_i}} = 1$, $k_i \geq k_j$ for $i < j$, $1 \leq i, j \leq d$, then, we may get all the non-isomorphic groups $A$ by choosing the element $a$ to satisfy the following relations:

$$a^{p^n} = y_j,\ k_j > k_{j+1},\ \text{where } y_{d+1} = 1,\ k_{d+1} = 0,\ k_{d+2} = -1,\ \text{and } 1 \leq j \leq d-1;$$

$$a^{-1} y_i a = (y_i)^{1+p^r},\ 1 \leq i \leq d,\ k_1 \geq r \geq \max[k_1 - n, k_j, 1],\ \text{when } p \neq 2,\ \text{or when } k_1 - r < 2;$$

$$a^{-1} y_i a = (y_i)^{e(1+2^r)},\ e = 1 \text{ or } -1 \text{ for } k_j < 2,\ e = 1 \text{ for } k_j \geq 2,$$

when $p = 2$ and $k_1 - 2 \geq r \geq \max[k_1 - n, k_j, 1]$.

From this discussion we get the following theorem:

THEOREM 9. *$G$ is an $NP$-group with $1 < H(G) < G$ if, and only if*

$$G = \{x_1, \ldots, x_m, H(G), a\},$$

*where $x_i$ and $a$ satisfy the relations given in (3) of Theorem 8 with the appropriate modifications indicated above. In addition, $\{H(G), a\}$ is a group $A$ described in the discussion immediately preceding this theorem, and finally every element of $H(G)$ commutes with $x_i$, $1 \leq i \leq m$.*

The verification of this theorem is quite straightforward, we only need to keep in mind that every subgroup of $F(G) = F_0(G) \otimes H(G)$ is normal in $G$, that $A/H(G)$ induces a cyclic $p$-group of $F$-automorphisms in $F_0(G)$, that $A/H(G)$ induces a cyclic $p$-group of automorphisms in the $p$-group $H(G)$, and that $G = F_0(G) A$.

Combining Theorems 7, 8, and 9, we see that the characterizations of $NP$-groups are complete except in the case when the $NP$-group $G$ may be written as an $F$-pair $(F(G), A)$, where $F(G)$ is a $q$-group, $A$ is a cyclic $p$-group, and $p$ and $q$ are distinct primes. In this case, we need to put down the condition (2) of Theorem 8.

7. *Remark.* We may use Theorem 1 to give a simple proof of a result of ZASSENHAUS [9; p. 61, Theorem 7].

THEOREM OF ZASSENHAUS. *A group $G$ is abelian if, and only if for every abelian subgroup $S$ of $G$, $N(S < G) = C(S < G)$.*

Proof. The necessity of the condition in the theorem is obvious. By using an induction argument on the order of the group $G$, we see that we may assume that every proper subgroup of $G$ is abelian, hence $G$ is semi-nilpotent. If $G$ is nilpotent, then let $M$ be a maximal abelian normal subgroup of $G$. By a result of ZASSENHAUS [8; p. 115], we have $M = C(M < G) = N(M < G) = G$, or $G$ is abelian. If $G$ is not nilpotent, then by Theorem 1, and the induction hypothesis, we have $1 < F_0(G) < G$, and $F_0(G)$ is an abelian normal subgroup of $G$; hence, $F_0(G) \leq Z(G)$. But $G$ splits over $F_0(G)$, and the complement is also abelian, hence, $G$ is abelian. This contradiction completes the proof. Q. E. D.

## Bibliography

[1] BAER, R.: Group elements of prime power index. Trans. Amer. Math. Soc. **75**, 20—47 (1953). — [2] BURNSIDE, W.: Theory of groups of finite order, 2. edit. New York 1955. — [3] IWASAWA, K.: Über die Struktur der endlichen Gruppen, deren echte Untergruppen sämtlich nilpotent sind. Proc. Phys.-Math. Soc. Jap. (3) **23**, 1—4 (1941). — [4] SCHMIDT, O.: Über Gruppen, deren sämtliche Teiler spezielle sind. Rec. math. Moscou **31**, 366—372 (1924). — [5] SHAW, R. H.: Remark on a theorem of Frobenius. Proc. Amer. Math. Soc. **3**, 970 (1952). — [6] SPEISER, A.: Die Theorie der Gruppen von endlicher Ordnung, 3. Aufl. Berlin 1937. — [7] ZASSENHAUS, H.: Über endliche Fastkörper. Hamburg. Abh. **11**, 187—220 (1935). — [8] ZASSENHAUS, H.: The theory of groups. New York 1949. — [9] ZASSENHAUS, H.: A group-theoretic proof of a theorem of Maclagan-Wedderburn. Proc. Glasgow Math. Assoc. **1**, 53—63 (1952).

*Dept. of Math., Princeton University, USA*

*(Eingegangen am 19. Februar 1957)*

Fan, K.
Math. Zeitschr. Bd. 68, S. 205—216 (1957)

# Existence Theorems and Extreme Solutions for Inequalities Concerning Convex Functions or Linear Transformations *)

By
Ky Fan

**1. Introduction.** This paper is concerned with consistency conditions and extreme solutions for inequalities involving convex functions or linear transformations. In section 2, we study a system (2) of inequalities concerning lower semi-continuous convex functions $f_\nu$ defined on a compact convex set in a topological vector space. Some examples and remarks related to results of 2 are given in section 3. In 4, the existence theorem concerning (2) established in 2 is applied to a relation of form (18) involving a continuous linear transformation $A$ and a convex set $C$. In section 5, we discuss inequalities of form (23), (23′) and (25) concerning a completely continuous linear transformation $A$. Actually relations (18) and (23) are not inequalities in the usual sense, but they are natural generalizations of inequalities. Since all vector spaces considered are real vector spaces, the word "real" will be omitted.

**2. Systems of convex inequalities.** As usual, a real-valued function $f$ defined on a convex set $K$ in a vector space is said to be *convex*, if

$$f(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) \leq \alpha_1 f(x_1) + \alpha_2 f(x_2)$$

holds for any two elements $x_1$, $x_2$ of $K$ and for any $\alpha_1 \geq 0$, $\alpha_2 \geq 0$ with $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$. $f$ is said to be *concave*, if $-f$ is convex. It was shown in [4] that certain basic results on systems of linear inequalities can be extended to finite systems of strict inequalities of the form

$$f_i(x) < 0 \qquad (1 \leq i \leq m), \tag{1}$$

where $f_i$ are convex functions defined on a convex set in a vector space. For such a system (1), results given in [4] are of purely algebraic nature and involve no topological consideration. In the present section, we shall be concerned with systems of inequalities of form (2), where each $f_\nu$ is a lower semi-continuous convex function defined on a compact convex set $K$ in a topological vector space. Due to the fact that the inequalities in (2) are not strict, our results concerning systems (2) involve topological considerations, but they are analogous to the topology-free results in [4] for system (1).

Theorem 1. *Let $K$ be a compact convex set in a topological vector space. Let $\{f_\nu\}_{\nu \in I}$ be a family* (finite or infinite) *of lower semi-continuous convex*

*) This work was sponsored by the U. S. National Science Foundation and the U. S. National Bureau of Standards.

*functions defined on $K$. Then the system of inequalities*

$$f_\nu(x) \leqq 0 \qquad (\nu \in I) \tag{2}$$

*is consistent on $K$* [i.e. there exists an $x \in K$ satisfying (2)], *if and only if, for any finite set of indices $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_n$ of $I$ and for any $n$ non-negative numbers $\lambda_i \geqq 0$ $(1 \leqq i \leqq n)$, the inequality*

$$\operatorname*{Min}_{x \in K} \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f_{\nu_i}(x) \leqq 0 \tag{3}$$

*holds.*

PROOF. Consider first the case $I = \{1, 2, \ldots, m\}$ is finite. The existence of an $x \in K$ satisfying all $m$ inequalities $f_i(x) \leqq 0$ $(1 \leqq i \leqq m)$ is equivalent to the truth of the relation

$$\operatorname*{Min}_{x \in K} \operatorname*{Max}_{1 \leqq i \leqq m} f_i(x) \leqq 0,$$

or, what is the same,

$$\operatorname*{Min}_{x \in K} \operatorname*{Max}_{\substack{\lambda_i \geqq 0 \\ \sum \lambda_i = 1}} \sum_{i=1}^{m} \lambda_i f_i(x) \leqq 0.$$

(Observe that the minimum in the last two relations exists, since $K$ is compact and the function to be minimized is lower semi-continuous on $K$.) Now since each $f_i$ is lower semi-continuous and convex on the compact convex set $K$, according to a minimax theorem [2, Theorem 1], [6], we have

$$\operatorname*{Min}_{x \in K} \operatorname*{Max}_{\substack{\lambda_i \geqq 0 \\ \sum \lambda_i = 1}} \sum_{i=1}^{m} \lambda_i f_i(x) = \operatorname*{Max}_{\substack{\lambda_i \geqq 0 \\ \sum \lambda_i = 1}} \operatorname*{Min}_{x \in K} \sum_{i=1}^{m} \lambda_i f_i(x).$$

Therefore, the system $f_i(x) \leqq 0$ $(1 \leqq i \leqq m)$ is consistent on $K$, if and only if

$$\operatorname*{Max}_{\substack{\lambda_i \geqq 0 \\ \sum \lambda_i = 1}} \operatorname*{Min}_{x \in K} \sum_{i=1}^{m} \lambda_i f_i(x) \leqq 0,$$

which is precisely the condition stated in the theorem. This proves the theorem for a finite system.

The result for an infinite system follows immediately from the result in the finite case, if we observe that the infinite system (2) is consistent, if and only if every finite subsystem is consistent. In fact, for each $\nu \in I$, $S_\nu = \{x \in K \mid f_\nu(x) \leqq 0\}$ is a closed subset of the compact set $K$, so $S = \bigcap_{\nu \in I} S_\nu$ is non-empty, when and only when any finite number of sets of the family $\{S_\nu\}_{\nu \in I}$ have a non-empty intersection.

THEOREM 2. *Let $K$ be a compact convex set in a topological vector space. Let $\{f_\nu\}_{\nu \in I}$ be a family of lower semi-continuous convex functions defined on $K$ such that the system* (2) *is consistent on $K$, and let*

$$S = \{x \in K \mid f_\nu(x) \leqq 0 \text{ for each } \nu \in I\}. \tag{4}$$

*Then, for any upper semi-continuous concave function $g$ defined on $K$, we have*

$$\max_{x\in S} g(x) = \inf_{\substack{\nu_i\in I\\ \lambda_i\geq 0}} \max_{x\in K}\left[g(x) - \sum_{i=1}^{n}\lambda_i f_{\nu_i}(x)\right], \tag{5}$$

*where, for the infimum, $n=1, 2, 3, \ldots$; $\nu_i\in I$ and $\lambda_i\geq 0$ vary.*

*If $I=\{1, 2, \ldots, m\}$ is finite and if the system of strict inequalities*

$$f_i(x)<0 \qquad (1\leq i\leq m) \tag{6}$$

*is consistent on $K$, then the infimum in (5) is actually a minimum, that is,*

$$\max_{x\in S} g(x) = \min_{\lambda_i\geq 0} \max_{x\in K}\left[g(x) - \sum_{i=1}^{m}\lambda_i f_i(x)\right]. \tag{7}$$

Proof. First observe that both maxima in (5) exist, since $S$, $K$ are compact and the functions to be maximized are upper semi-continuous. Let $\gamma = \max_{x\in S} g(x)$ and let $x_0\in S$ be such that $g(x_0)=\gamma$. For any finite set of indices $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_n$ of $I$ and for any $\lambda_i\geq 0$ $(1\leq i\leq n)$, we have

$$\gamma\leq g(x_0) - \sum_{i=1}^{n}\lambda_i f_{\nu_i}(x_0)\leq \max_{x\in K}\left[g(x) - \sum_{i=1}^{n}\lambda_i f_{\nu_i}(x)\right].$$

Hence the infimum in (5) is $\geq\gamma$. For any $\varepsilon>0$, the system obtained by adjoining the inequality $\gamma+\varepsilon-g(x)\leq 0$ to (2) is inconsistent on $K$. By Theorem 1, there exist a finite set of indices $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_n$ of $I$ and $n+1$ non-negative numbers $\lambda_i\geq 0$ $(1\leq i\leq n+1)$ such that

$$\min_{x\in K}\left[\sum_{i=1}^{n}\lambda_i f_{\nu_i}(x) + \lambda_{n+1}\left(\gamma+\varepsilon-g(x)\right)\right] > 0.$$

As (2) is consistent, we have $\lambda_{n+1}>0$ and therefore we may assume $\lambda_{n+1}=1$. Then the last inequality becomes

$$\max_{x\in K}\left|g(x) - \sum_{i=1}^{n}\lambda_i f_{\nu_i}(x)\right| < \gamma+\varepsilon.$$

This shows that the infimum in (5) is $\leq\gamma$, and therefore equal to $\gamma$.

Assume now that $I=\{1, 2, \ldots, m\}$ is finite and that system (6) of strict inequalities is consistent. As in the above, for each positive integer $k$, there exist $m+1$ non-negative numbers $\lambda_{ki}\geq 0$ $(1\leq i\leq m+1)$ such that

$$\min_{x\in K}\left[\sum_{i=1}^{m}\lambda_{ki} f_i(x) + \lambda_{k,m+1}\left(\gamma+\frac{1}{k}-g(x)\right)\right] > 0.$$

We may assume $\sum_{i=1}^{m+1}\lambda_{ki}=1$. Then we can find an increasing sequence of $k$'s such that the $m+1$ limits $\lim_{k\to\infty}\lambda_{ki}=\lambda_i$ $(1\leq i\leq m+1)$ exist. We have $\lambda_i\geq 0$, $\sum_{i=1}^{m+1}\lambda_i=1$ and

$$\sum_{i=1}^{m}\lambda_i f_i(x) + \lambda_{m+1}\left(\gamma-g(x)\right)\geq 0 \quad \text{for } x\in K. \tag{8}$$

If $\lambda_{m+1}>0$, then (8) can be written

$$\gamma \geq \operatorname*{Max}_{x\in K}\left|g(x)-\sum_{i=1}^{m}\frac{\lambda_i}{\lambda_{m+1}}f_i(x)\right|$$

and consequently the infimum in (5) is actually a minimum. It remains therefore to prove that $\lambda_{m+1}$ in (8) is positive. Suppose $\lambda_{m+1}=0$. Then (8) becomes $\sum_{i=1}^{m}\lambda_i f_i(x)\geq 0$ for $x\in K$. But $\lambda_i\geq 0$, $\sum_{i=1}^{m}\lambda_i=1$, at least one $\lambda_i$ is $>0$, so no $x\in K$ would satisfy (6). This shows $\lambda_{m+1}>0$ and thereby completes the proof.

In connection with Theorem 2, we mention that system (6) of strict inequalities is consistent on $K$, if and only if

$$\operatorname*{Min}_{x\in K}\sum_{i=1}^{m}\lambda_i f_i(x)<0$$

holds for any $m$ non-negative numbers $\lambda_i$, not all zero (see [4, Theorem 1]).

We shall say that a finite system

$$f_i(x)\leq 0 \qquad (1\leq i\leq m) \tag{9}$$

of inequalities is *irreducibly inconsistent* on $K$, if (9) is inconsistent on $K$ and if every subsystem of (9) formed by $m-1$ inequalities is consistent. In case $m=1$, an inconsistent system formed by a single inequality will be regarded as irreducibly inconsistent.

THEOREM 3. *Let $f_i$ $(1\leq i\leq m)$ be $m$ lower semi-continuous convex functions defined on a compact convex set $K$ in a topological vector space. Then the system* (9) *of inequalities is irreducibly inconsistent on $K$, if and only if the following two conditions are both fulfilled:*

(i) *There exist $m$ positive numbers $\lambda_i>0$ such that*

$$\sum_{i=1}^{m}\lambda_i f_i(x)>0 \qquad \text{for all } x\in K.$$

(ii) *No linear combination of $m-1$ of the functions $f_i$ with real coefficients can remain $>0$ throughout $K$.*

PROOF. The sufficiency is immediately seen. In fact, by Theorem 1, (i) implies the inconsistency of (9), and (ii) implies the consistency of any subsystem of (9) formed by $m-1$ inequalities.

Assume now that (9) is irreducibly inconsistent. Then (i) follows again from Theorem 1. It remains to prove (ii). Suppose there exist $m-1$ real numbers $\mu_i$ $(1\leq i\leq m-1)$ such that

$$\sum_{i=1}^{m-1}\mu_i f_i(x)>0 \qquad \text{for all } x\in K. \tag{10}$$

To derive a contradiction, we first observe from (10) that $J=\{i\,|\,\mu_i<0\}$ is non-empty by considering an $x\in K$ satisfying the first $m-1$ inequalities of

(9). On the other hand, since (i) is true, there exist $m-1$ positive numbers $\lambda_i > 0$ $(1 \leq i \leq m-1)$ with the property that

$$f_m(x) + \sum_{i=1}^{m-1} \lambda_i f_i(x) > 0 \qquad \text{for } x \in K. \tag{11}$$

Now, let $\varkappa = \operatorname{Max}_{i \in J} \frac{\lambda_i}{\mu_i} < 0$ and let $\eta_i = \lambda_i - \varkappa \mu_i$ $(1 \leq i \leq m-1)$. Then by (10), (11), every $x \in K$ satisfies

$$f_m(x) + \sum_{i=1}^{m-1} \eta_i f_i(x) - f_m(x) + \sum_{i=1}^{m-1} \lambda_i f_i(x) - \varkappa \sum_{i=1}^{m-1} \mu_i f_i(x) > f_m(x) + \sum_{i=1}^{m-1} \lambda_i f_i(x) > 0.$$

As $\eta_i \geq 0$ $(1 \leq i \leq m-1)$ and at least one $\eta_i = 0$, by Theorem 1, there would be an inconsistent subsystem of (9) formed by $m-1$ inequalities. Thus the necessity of (ii) is proved.

**3. Examples and remarks.** Even for a finite system on a finite dimensional vector space, the compactness of $K$ in Theorem 1 is an essential hypothesis. Consider for example the closed convex set $K$ in the Euclidean 3-space formed by all points $x$ whose coordinates $(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ satisfy $\xi_j \geq 0$ $(j = 1, 2, 3)$ and $\xi_3^2 \leq \xi_1 \xi_2$. Let $f_i$ $(1 \leq i \leq 4)$ be defined by $f_1(x) = -f_2(x) = \xi_1$, $f_3(x) = -f_4(x) = \xi_3 - 1$ for $x = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$. Then the system $f_i(x) \leq 0$ $(1 \leq i \leq 4)$ is inconsistent on $K$. However, for any $\lambda_i \geq 0$ $(1 \leq i \leq 4)$, there exists an $x \in K$ such that $\sum_{i=1}^{4} \lambda_i f_i(x) \leq 0$.

In the second part of Theorem 2, the additional hypothesis that the system (6) of strict inequalities is consistent is essential. Let $K$ be the closed unit interval $0 \leq x \leq 1$ in the real line. The system formed by the single inequality $x \leq 0$ is consistent on $K$, while the strict inequality $x < 0$ is inconsistent on $K$. For the concave function $g$ on $K$ defined by $g(x) = (2x - x^2)^{\frac{1}{2}}$, we have $\operatorname{Inf}_{\lambda \geq 0} \operatorname{Max}_{0 \leq x \leq 1} [(2x - x^2)^{\frac{1}{2}} - \lambda x] = 0$, but this infimum is not a minimum.

As an interesting example of application of Theorem 1, we include a simple proof of the following well-known theorem of HARDY, LITTLEWOOD and PÓLYA [5, p. 49]: *If the real numbers $a_i, b_i$ $(1 \leq i \leq n)$ satisfy the conditions*

$$a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq a_n \geq 0, \qquad b_1 \geq b_2 \geq \cdots \geq b_n \geq 0, \tag{12}$$

$$\sum_{i=1}^{k} a_i \leq \sum_{i=1}^{k} b_i \qquad (1 \leq k \leq n), \tag{13}$$

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{i=1}^{n} b_i, \tag{14}$$

*then there exists a doubly stochastic matrix $P = (p_{ij})$ of order $n$ such that*

$$a_i = \sum_{j=1}^{n} p_{ij} b_j \qquad (1 \leq i \leq n). \tag{15}$$

Here we call a square matrix $P = (p_{ij})$ *doubly stochastic*, if $p_{ij} \geq 0$ and if $\sum_{j=1}^{n} p_{ij} = 1$ for every $i$, $\sum_{i=1}^{n} p_{ij} = 1$ for every $j$. Let $K$ denote the set of all

doubly stochastic matrices of order $n$. Then $K$ may be regarded as a compact convex set in the $n^2$-dimensional Euclidean space. For any doubly stochastic matrix $P=(p_{ij})$ of order $n$, let

$$f_i(P) = a_i - \sum_{j=1}^{n} p_{ij} b_j \qquad (1 \leq i \leq n).$$

Then the conclusion of the above theorem means that the system of $2n$ inequalities $f_i(P) \leq 0$, $-f_i(P) \leq 0$ $(1 \leq i \leq n)$ has a solution $P \in K$. According to Theorem 1, this is equivalent to the following statement: For any $n$ real numbers $c_i$ (of arbitrary signs), there exists a doubly stochastic matrix $P=(p_{ij})$ of order $n$ such that $\sum_{i=1}^{n} c_i f_i(P) \leq 0$, i.e.

$$\sum_{i=1}^{n} c_i a_i \leq \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} c_i p_{ij} b_j. \tag{16}$$

To prove this statement, it suffices to consider the case where all $c_i \geq 0$. In fact, we can always introduce a number $d$ such that $c_i' = c_i + d \geq 0$ $(1 \leq i \leq n)$. If a doubly stochastic matrix $P=(p_{ij})$ satisfies

$$\sum_{i=1}^{n} c_i' a_i \leq \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} c_i' p_{ij} b_j,$$

then by virtue of (14) and $\sum_{i=1}^{n} p_{ij} = 1$, this same matrix also satisfies (16). Consider now any $n$ numbers $c_i \geq 0$. Let $\pi$ be a permutation of the indices $1, 2, \ldots, n$ such that $c_{\pi(1)} \geq c_{\pi(2)} \geq \cdots \geq c_{\pi(n)} \geq 0$. Then the doubly stochastic matrix $P=(p_{ij})$ defined by

$$p_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{if } i = \pi(j), \\ 0, & \text{if } i \neq \pi(j), \end{cases}$$

satisfies (16). In fact, from (12), (13), we have

$$\sum_{i=1}^{n} c_i a_i \leq \sum_{i=1}^{n} c_{\pi(i)} a_i \leq \sum_{i=1}^{n} c_{\pi(i)} b_i = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} c_i p_{ij} b_j.$$

This completes the proof of HARDY-LITTLEWOOD-PÓLYA'S theorem.

Returning to Theorems 1, 2, 3, we observe that they can be generalized to results which involve no vector space. In fact, Theorem 1 remains true for a family of lower semi-continuous functions $\{f_\nu\}_{\nu \in I}$ defined on an arbitrary compact space $K$, provided this family of functions has the following property: For any two elements $x_1$, $x_2$ of $K$ and for any $\alpha_1 \geq 0$, $\alpha_2 \geq 0$ with $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$, there exists an $x_0 \in K$ such that $f_\nu(x_0) \leq \alpha_1 f_\nu(x_1) + \alpha_2 f_\nu(x_2)$ for every $\nu \in I$. The proof needs no change, since the minimax theorem [2, Theorem 1] used in the proof involves no vector space. Theorems 2 and 3 can be generalized in a similar manner. To generalize Theorem 2, we assume that each $f_\nu$ is lower semi-continuous and $g$ is upper semi-continuous on a compact space $K$, and that the family of functions obtained by adjoining $-g$ to $\{f_\nu\}_{\nu \in I}$ has the property described above in the generalization of Theorem 1.

**4. Application to linear transformations.** As usual, we denote by $X^*$ the conjugate space of a normed vector space $X$. For a continuous linear transformation $A$ from a normed vector space $X$ into a normed vector space $Y$, we denote by $A^*$ the transposed (i.e. the adjoint) linear transformation of $A$. For a convex set $C$ in a normed vector space $X$, the polar convex set of $C$ will be denoted by $\hat{C}$, which is defined by

$$\hat{C} = \{f \in X^* \mid f(x) \leq 1 \text{ for every } x \in C\}. \tag{17}$$

THEOREM 4. *Let $A$ be a continuous linear transformation from a reflexive Banach space $X$ into a normed vector space $Y$. Let $C$ be a closed convex set in $Y$ containing the null-element of $Y$. Let $y_0 \in Y$. Then:*

(i) *For $\varrho \geq 0$, there exists an $x \in X$ satisfying $\|x\| \leq \varrho$ and*

$$Ax - y_0 \in C, \tag{18}$$

*if and only if*

$$1 + f(y_0) + \varrho \|A^* f\| \geq 0 \quad \text{for } f \in \hat{C}. \tag{19}$$

(ii) *If the set $S$ of all $x \in X$ satisfying (18) is non-empty and if $0 \notin S$, then*

$$\operatorname*{Min}_{x \in S} \|x\| = \operatorname*{Sup}_{\substack{f \in \hat{C} \\ A^* f \neq 0}} \frac{-1 - f(y_0)}{\|A^* f\|}. \tag{20}$$

PROOF. (i) Since the convex set $C$ is closed in $Y$ and $0 \in C$, (18) is equivalent to the following system of inequalities

$$f(Ax - y_0) \leq 1 \quad \text{for } f \in \hat{C},$$

or, what is the same,

$$(A^* f)(x) - f(y_0) - 1 \leq 0 \quad \text{for } f \in \hat{C}. \tag{21}$$

By reflexivity of $X$, the convex set $K = \{x \in X \mid \|x\| \leq \varrho\}$ is compact with respect to the weak topology of $X$. For each $f \in \hat{C}$, the left-hand side of (21) is a convex function of $x$ which is continuous with respect to the weak topology of $X$. Hence by Theorem 1, there exists an $x \in K$ satisfying (21), if and only if

$$\operatorname*{Min}_{x \mid \leq \varrho} \sum_{i=1}^{n} \lambda_i [(A^* f_i)(x) - f_i(y_0) - 1] \leq 0$$

holds for any finite number of $f_i \in \hat{C}$ and for any $\lambda_i \geq 0$ with $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$. Since $f_i \in \hat{C}$, $\lambda_i \geq 0$ and $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$ imply $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i f_i \in \hat{C}$, this condition is equivalent to

$$\operatorname*{Min}_{\|x\| \leq \varrho} [(A^* f)(x) - f(y_0) - 1] \leq 0 \quad \text{for } f \in \hat{C},$$

which is precisely condition (19).

(ii) First $\sigma = \operatorname*{Min}_{x \in S} \|x\|$ exists. This follows from the well-known fact that a non-empty closed convex set in a reflexive Banach space has at least an

element of least norm. Since $0 \notin S$, we have $\sigma > 0$. Condition (19) is satisfied for $\varrho \geq \sigma$, but not for $\varrho < \sigma$. This implies the existence of $f \in \hat{C}$ with $A^* f \neq 0$. From (i) it is clear that the supremum in (20) is $\leq \sigma$. For any $\varepsilon$ such that $0 < \varepsilon \leq \sigma$, no $x \in X$ can satisfy both $\|x\| \leq \sigma - \varepsilon$ and (18). Again by (i), there exists an $f_\varepsilon \in \hat{C}$ such that

$$1 + f_\varepsilon(y_0) + (\sigma - \varepsilon)\|A^* f_\varepsilon\| < 0. \tag{22}$$

Since (19) holds for $f = f_\varepsilon$ and $\varrho = \sigma$, (22) implies $\sigma\|A^* f_\varepsilon\| > (\sigma - \varepsilon)\|A^* f_\varepsilon\|$, whence $A^* f_\varepsilon \neq 0$. Then (22) shows that the supremum in question is $> \sigma - \varepsilon$ and therefore is equal to $\sigma$.

We mention two special cases of Theorem 4.

(CASE 1) $C = \{y \in Y \mid \|y\| \leq \delta\}$, where $\delta \geq 0$.

In this case, it is easily seen that (18), (19), (20) become respectively

$$\|Ax - y_0\| \leq \delta, \tag{18'}$$

$$\delta\|f\| + f(y_0) + \varrho\|A^* f\| \geq 0 \text{ for all } f \in Y^*, \tag{19'}$$

$$\operatorname*{Min}_{x \in S} \|x\| = \operatorname*{Sup}_{\substack{f \in Y^* \\ \|A^* f\| = 1}} \{f(y_0) - \delta\|f\|\}. \tag{20'}$$

(CASE 2) $C$ is a closed convex cone in $Y$ (i.e. $C + C \subset C$ and $\lambda C \subset C$ for all $\lambda \geq 0$).

In this case, $\hat{C}$ is also a convex cone. In fact, $\hat{C} = \{f \in Y^* \mid f(y) \leq 0 \text{ for all } y \in C\}$. It can be easily seen that (19), (20) are respectively equivalent to

$$f(y_0) + \varrho\|A^* f\| \geq 0 \quad \text{for all } f \in \hat{C}, \tag{19''}$$

$$\operatorname*{Min}_{x \in S} \|x\| = \operatorname*{Sup}_{\substack{f \in \hat{C} \\ A^* f = 1}} [-f(y_0)]. \tag{20''}$$

**5. Completely continuous linear transformations.** In this section, we confine ourselves to completely continuous linear transformations.

A convex set $C$ in a normed vector space $X$ is said to be *Euclidean-closed*, if, for any continuous linear transformation $T$ from $X$ onto a finite dimensional Euclidean space $E^n$, the image $T(C)$ is a closed set in $E^n$. For example, every linear subspace (not necessarily closed) in $X$ is Euclidean-closed. In case $X$ is reflexive, every bounded closed convex set in $X$ is compact with respect to the weak topology of $X$, and therefore is Euclidean-closed.

THEOREM 5. *Let $C$ be a Euclidean-closed convex set in a Banach space $X$ such that $0 \in C$. Let $A$ be a completely continuous linear transformation of $X$ into itself, let $y_0 \in X$ and $\lambda \neq 0$ be a real number. Then there exists an $x \in X$ such that*

$$Ax - \lambda x - y_0 \in C, \tag{23}$$

*if and only if*

$$1 + f(y_0) \geq 0 \tag{24}$$

*holds for every $f \in \hat{C}$ satisfying the equation $A^* f - \lambda f = 0$.*

PROOF. The necessity of the condition is trivial. In fact, if $Ax_0 - \lambda x_0 - y_0 = z_0 \in C$, and if $f_0 \in \hat{C}$, $A^* f_0 - \lambda f_0 = 0$, then

$$f_0(y_0) = f_0(Ax_0 - \lambda x_0 - z_0) = (A^* f_0 - \lambda f_0)(x_0) - f_0(z_0)$$
$$= -f_0(z_0) \geq -1.$$

To prove the sufficiency of the condition, we shall need the complete continuity of $A$ and make use of SCHAUDER's generalization [8], [1, p. 160], [9, p. 340] of a classical theorem of FREDHOLM. First, if the equation $A^* g - \lambda g = 0$ has no solution besides $g = 0$, then the linear transformation $A - \lambda I$ (where $I$ denotes the identity transformation of $X$) maps $X$ onto itself, so obviously there exist $x \in X$ satisfying (23). Let now $g_1, g_2, \ldots, g_n$ be a maximal system of linearly independent solutions of the equation $A^* g - \lambda g = 0$. Then for any $z \in X$, the equation $Ax - \lambda x - y_0 = z$ has a solution $x \in X$, if and only if $g_i(y_0 + z) = 0$ $(1 \leq i \leq n)$. Let $D$ denote the convex set in the Euclidean $n$-space $E^n$ formed by all points with coordinates $\big(g_1(z), g_2(z), \ldots, g_n(z)\big)$, where $z \in C$. Let $p$ denote the point in $E^n$ with coordinates $\big(-g_1(y_0), -g_2(y_0), \ldots, -g_n(y_0)\big)$. Suppose no $x \in X$ satisfies (23). Then in $E^n$, the point $p$ is not contained in the convex set $D$. Since $C$ is Euclidean-closed, $D$ is closed in $E^n$. So there exists a hyperplane in $E^n$ which separates $p$ and $D$ strictly. That is, there exist real numbers $\mu_i$ $(1 \leq i \leq n)$ and $\alpha$ such that

$$\sum_{i=1}^{n} \mu_i g_i(z) < \alpha < -\sum_{i=1}^{n} \mu_i g_i(y_0) \qquad \text{for } z \in C.$$

Since $0 \in C$, we must have $\alpha > 0$. Therefore we may assume $\alpha = 1$. Let $f = \sum_{i=1}^{n} \mu_i g_i$. Then $f(z) < 1 < -f(y_0)$ for all $z \in C$, which implies $f \in \hat{C}$ and $1 + f(y_0) < 0$. Furthermore, since $A^* g_i - \lambda g_i = 0$, we have $A^* f - \lambda f = 0$. This proves the sufficiency of the condition.

In case the convex set $C$ consists of the null-element of $X$ only, (23) reduces to the linear equation $Ax - \lambda x - y_0 = 0$. Then, since $\hat{C} = X^*$, condition (24) is equivalent to "$f(y_0) = 0$ for all solutions $f$ of the equation $A^* f - \lambda f = 0$". Hence, in this case, Theorem 5 becomes SCHAUDER's theorem used in the above proof.

If we use the recent generalization by LERAY [7] of SCHAUDER's theorem, Theorem 5 can be easily extended to locally convex topological vector spaces.

Even for a finite dimensional vector space $X$, the conclusion of Theorem 5 need not hold, if the convex set $C$ is closed in $X$ instead of being Euclidean-closed. Consider again the convex cone $C$ in $E^3$ formed by all points $x = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ such that $\xi_j \geq 0$ $(j = 1, 2, 3)$ and $\xi_3^2 \leq \xi_1 \xi_2$. Let $A$ be the linear transformation in $E^3$ defined by $A(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = (0, \xi_2, 0)$, and let $y_0 = (0, 0, -1)$. A linear form $f = \alpha_1 \xi_1 + \alpha_2 \xi_2 + \alpha_3 \xi_3$ is in $\hat{C}$, if and only if $\alpha_1 \leq 0$, $\alpha_2 \leq 0$ and $\alpha_3 \leq 2\,(\alpha_1 \alpha_2)^{\frac{1}{2}}$. So a linear form $f = \alpha_1 \xi_1 + \alpha_2 \xi_2 + \alpha_3 \xi_3$ satisfies $A^* f = 0$ and $f \in \hat{C}$, if and only if $\alpha_1 \leq 0$, $\alpha_2 = 0$, $\alpha_3 \leq 0$. For such an $f$, we have $1 + f(y_0) = 1 - \alpha_3 \geq 1$. Thus condition (24) is satisfied. Nevertheless it is clear that no

$x \in E^3$ can satisfy $Ax - y_0 \in C$. (Here, because we are concerned with a finite dimensional vector space, the identity transformation $I$ is completely continuous, so we simply write $A$ instead of $A - \lambda I$.) Notice that the convex cone $C$ is closed in $E^3$, but not Euclidean-closed.

If the Banach space $X$ is reflexive, and if $C = \{x \in X \mid \|x\| \leqq \delta\}$, where $\delta \geqq 0$, then $C$ is Euclidean-closed and Theorem 5 becomes the following result, which has already been given in [3, Theorem 24']:

THEOREM 5'. *Let $X$ be a reflexive Banach space, and let $A$ be a completely continuous linear transformation of $X$ into itself. Let $y_0 \in X$, $\delta \geqq 0$ and let $\lambda \neq 0$ be a real number. Then there exists an $x \in X$ satisfying*

$$\|Ax - \lambda x - y_0\| \leqq \delta, \tag{23'}$$

*if and only if every solution $f \in X^*$ of the equation $A^*f - \lambda f = 0$ satisfies the relation*

$$|f(y_0)| \leqq \delta \|f\|. \tag{24'}$$

Using this result, we shall prove

THEOREM 6. *Let $X$ be a reflexive Banach space, and let $A$ be a completely continuous linear transformation of $X$ into itself. Let $y_0 \in X$, $\delta > 0$ and let $\lambda \neq 0$ be a real number. Then there exists an $x \in X$ satisfying the strict inequality*

$$\|Ax - \lambda x - y_0\| < \delta, \tag{25}$$

*if and only if every solution $f \neq 0$ of the equation $A^*f - \lambda f = 0$ satisfies the strict inequality*

$$|f(y_0)| < \delta \|f\|. \tag{26}$$

PROOF. Assume (25) has solutions $x \in X$. Then there exist $x_0 \in X$ and $\varepsilon > 0$ such that $\|Ax_0 - \lambda x_0 - y_0\| \leqq \delta - \varepsilon$. By Theorem 5', every solution $f$ of the equation $A^*f - \lambda f = 0$ satisfies $|f(y_0)| \leqq (\delta - \varepsilon)\|f\|$. If $f \neq 0$, then $(\delta - \varepsilon)\|f\| < \delta \|f\|$ and therefore (26).

To prove the converse, assume that no $x \in X$ satisfies (25). Then for every integer $n \geqq \frac{1}{\delta}$, the inequality $\|Ax - \lambda x - y_0\| \leqq \delta - \frac{1}{n}$ has no solution. By Theorem 5', there exists $f_n \in X^*$ such that

$$A^*f_n - \lambda f_n = 0, \quad |f_n(y_0)| > \left(\delta - \frac{1}{n}\right)\|f_n\|.$$

We may assume $\|f_n\| = 1$. Since $X^*$ is reflexive, $\{f_n\}$ has a subsequence $\{f_{\nu_n}\}$ which converges weakly to some $f_0 \in X^*$. Clearly $\|f_0\| \leqq 1$. As $A^*$ is, like $A$, completely continuous, $\{A^*f_{\nu_n}\}$ converges strongly (and therefore also weakly) to $A^*f_0$. Hence we have $A^*f_0 - \lambda f_0 = 0$. Further,

$$|f_0(y_0)| = \lim_{n\to\infty} |f_{\nu_n}(y_0)| \geqq \lim_{n\to\infty} \left(\delta - \frac{1}{\nu_n}\right)\|f_{\nu_n}\| = \delta \geqq \delta \|f_0\|.$$

We also see that $f_0 \neq 0$, since $|f_0(y_0)| \geq \delta > 0$. Thus we have found an $f_0 \neq 0$ such that $A^* f_0 - \lambda f_0 = 0$ and $|f_0(y_0)| \geq \delta \|f_0\|$.

THEOREM 7. *Let $A$ be a completely continuous linear transformation of a reflexive Banach space $X$ into itself. Let $y_0 \in X$ and real numbers $\lambda \neq 0$, $\delta > 0$ be such that the strict inequality* (25) *has solutions $x \in X$. Let $S$ denote the set of all solutions $x$ of the inequality* (23′), *and assume that $0 \notin S$. Then*

$$\operatorname*{Min}_{x \in S} \|x\| = \operatorname*{Max}_{\substack{f \in X^* \\ \|A^* f - \lambda f\| = 1}} [f(y_0) - \delta \|f\|]. \tag{27}$$

*Furthermore, if $\sigma$ denotes this common value and if $x_0 \in X$, $f_0 \in X^*$ are such that*

$$x_0 \in S, \quad \|x_0\| = \sigma, \quad \|A^* f_0 - \lambda f_0\| = 1, \quad f_0(y_0) - \delta \|f_0\| = \sigma, \tag{28}$$

*then*

$$(A^* f_0 - \lambda f_0)(x_0) = \sigma. \tag{29}$$

(Consequently, when $X$ is strictly convex[1]) $x_0$ is uniquely determined by $f_0$.)

PROOF. According to Case 1 of Theorem 4, $\sigma = \operatorname{Min}_{x \in S} \|x\|$ is equal to the supremum of $f(y_0) - \delta \|f\|$, when $f \in X^*$ varies under the condition $\|A^* f - \lambda f\| = 1$. We have to prove that this supremum is actually a maximum.

For every integer $n \geq \frac{1}{\sigma}$, no $x \in X$ can satisfy both $\|x\| \leq \sigma - \frac{1}{n}$ and (23′). According to Case 1 of Theorem 4 [see (19′)], there exists an $f_n \in X^*$ such that

$$|f_n(y_0)| - \delta \|f_n\| > \left(\sigma - \frac{1}{n}\right) \|A^* f_n - \lambda f_n\|.$$

We may assume $\|f_n\| = 1$ and $f_n(y_0) \geq 0$. By reflexivity of $X^*$, there exists a subsequence $\{f_{\nu_n}\}$ which converges weakly to some $f_0 \in X^*$. We have $\|f_0\| \leq 1$ and

$$\begin{aligned} f_0(y_0) - \delta \|f_0\| \geq f_0(y_0) - \delta &= \lim_{n \to \infty} \{f_{\nu_n}(y_0) - \delta \|f_{\nu_n}\|\} \\ &\geq \overline{\lim_{n \to \infty}} \left(\sigma - \frac{1}{\nu_n}\right) \|A^* f_{\nu_n} - \lambda f_{\nu_n}\|. \end{aligned}$$

On the other hand, since $A^*$ is completely continuous, $\{A^* f_{\nu_n}\}$ converges strongly to $A^* f_0$. So $\{A^* f_{\nu_n} - \lambda f_{\nu_n}\}$ converges weakly to $A^* f_0 - \lambda f_0$, and

$$\overline{\lim_{n \to \infty}} \left(\sigma - \frac{1}{\nu_n}\right) \|A^* f_{\nu_n} - \lambda f_{\nu_n}\| \geq \sigma \|A^* f_0 - \lambda f_0\|.$$

Hence

$$f_0(y_0) - \delta \|f_0\| \geq f_0(y_0) - \delta \geq \sigma \|A^* f_0 - \lambda f_0\|.$$

But (23′) has solutions $x$ with $\|x\| = \sigma$, so according to Case 1 of Theorem 4, we must have equality signs in the last formula. Thus

$$f_0(y_0) - \delta \|f_0\| = \sigma \|A^* f_0 - \lambda f_0\| \tag{30}$$

[1]) $X$ is *strictly convex*, if no two distinct elements $x_1, x_2$ of $X$ can satisfy $\|x_1\| = \|x_2\| = \frac{1}{2}\|x_1 + x_2\|$.

and $\|f_0\| = 1$. Consider now any solution $x_1$ of the strict inequality (25). We have

$$f_0(y_0 + \lambda x_1 - A x_1) \leq \|f_0\| \cdot \|A x_1 - \lambda x_1 - y_0\| < \delta$$

and

$$(A^* f_0 - \lambda f_0)(x_1) > f_0(y_0) - \delta \geq 0.$$

This implies $A^* f_0 - \lambda f_0 \neq 0$. Hence (30) shows that the supremum $\sigma$ is actually attained as a maximum.

Finally, if $x_0 \in X$ and $f_0 \in X^*$ satisfy (28), then

$$\begin{aligned} \sigma &= \|A^* f_0 - \lambda f_0\| \cdot \|x_0\| \geq (A^* f_0 - \lambda f_0)(x_0) \\ &= f_0(y_0) + f_0(A x_0 - \lambda x_0 - y_0) \geq \sigma + \delta \|f_0\| - \delta \|f_0\| = \sigma \end{aligned}$$

and therefore (29).

## Bibliography

[1] BANACH, S.: Théorie des opérations linéaires. Warszawa 1932. — [2] FAN, K.: Minimax theorems. Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. **39**, 42—47 (1953). — [3] FAN, K.: On systems of linear inequalities. Linear inequalities and related systems (edited by H. W. KUHN and A. W. TUCKER, Annals of Mathematics Study 38, Princeton 1956), 99—156. — [4] FAN, K., I. GLICKSBERG and A. J. HOFFMAN: Systems of inequalities involving convex functions. Proc. Amer. Math. Soc. **8**, 617—622 (1957). — [5] HARDY, G. H., J. E. LITTLEWOOD and G. PÓLYA: Inequalities. Cambridge 1934. — [6] KNESER, H.: Sur un théorème fondamental de la théorie des jeux. C. R. Acad. Sci. Paris **234**, 2418—2420 (1952). — [7] LERAY, J.: Valeurs propres et vecteurs propres d'un endomorphisme complètement continu d'un espace vectoriel à voisinages convexes. Acta Sci. Math. Szeged B **12**, 177—186 (1950). — [8] SCHAUDER, J.: Über lineare, vollstetige Funktionaloperationen. Studia Math. **2**, 183—196 (1930). — [9] ZAANEN, A. C.: Linear analysis. New York-Amsterdam-Groningen 1953.

*Oak Ridge National Laboratory, Oak Ridge, Tennessee (U.S.A.)*

*(Eingegangen am 2. März 1957)*

## Fünfstellige Tabellen zu den elliptischen Funktionen

**Dargestellt mittels des Jacobischen Parameters $q$.**

## Five Place Tables of Elliptical Functions

**Based on Jacobi's Parameter $q$.**

Von Dr.-Ing. **M. Schuler**, Professor emeritus, Universität Göttingen, und Dr. phil. habil. **H. Gebelein**, Dozent, Bamberg. Mit einem englischen Text von Lauritz S. Larsen, B. S. Mit 11 Abbildungen. XI, 114 Seiten Gr.-8°. 1955.

Ganzleinen DM 29.60

## Acht- und neunstellige Tabellen zu den elliptischen Funktionen

**Dargestellt mittels des Jacobischen Parameters $q$.**

## Eight and Nine Place Tables of Elliptical Functions

**Based on Jacobi's Parameter $q$.**

Von Dr.-Ing. **M. Schuler**, Professor emeritus, Universität Göttingen, und Dr. phil. habil. **H. Gebelein**, Dozent, Bamberg. Mit einem englischen Text von Lauritz S. Larsen, B. S. Mit 11 Abbildungen. XXIV, 296 Seiten 4°. 1955.

Ganzleinen DM 58.—

Aus den Besprechungen: Die elliptischen Funktionen sind in den letzten zwei Jahrzehnten wiederholt in Amerika, England und Deutschland vertafelt worden, doch dürfte keines dieser Werke dem vorliegenden an Genauigkeit und Ausführung gleichkommen. So ist z. B. der Jacobische Parameter $q$ als Tafeleingang verwendet worden und nicht der Legendresche Modul, wie es bisher üblich war, ferner sind die elliptischen Funktionen nicht direkt, sondern über verwandte Hilfsfunktionen tabelliert, die hinsichtlich der Interpolation große Vorteile bieten.

Inhaltlich differiert die fünfstellige von der achtstelligen Tafel nur soweit, als es die unterschiedliche Genauigkeit erfordert. Die Tafeln enthalten die Werte jener Hilfsfunktionen, mit deren Hilfe man die Jacobischen elliptischen und die Jacobischen Theta-Funktionen berechnen kann, ferner die Koeffizienten für die Interpolation nach EVERETT und eine Umrechnungstabelle für den Legendreschen und Jacobischen Parameter. Das gesamte Zahlenmaterial ist sehr übersichtlich angeordnet und der Gebrauch aller Tafeln ist eingangs in deutscher und englischer Sprache hinreichend erläutert. *„Internationale Mathematische Nachrichten"*

**SPRINGER-VERLAG / BERLIN · GÖTTINGEN · HEIDELBERG**

# Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften

**in Einzeldarstellungen mit besonderer Berücksichtigung der Anwendungsgebiete.**

Herausgegeben von R. Grammel, E. Hopf, H. Hopf, W. Magnus, F. K. Schmidt, B. L. van der Waerden.

## LXXXI. Band: Einführung in die transzendenten Zahlen

Von Dr. **Theodor Schneider,** o. Professor der Mathematik an der Universität Erlangen. VII, 150 Seiten Gr.-8°. 1957. DM 21.60; Ganzleinen DM 24.80

Inhaltsverzeichnis: **I. Konstruktion transzendenter Zahlen.** Der Liouvillesche Approximationssatz. Liouvillesche transzendente Zahlen. Verallgemeinerung des Liouvilleschen Satzes. Eine Anwendung des verallgemeinerten Liouvilleschen Satzes. Schärfere Approximationssätze. Der Satz von Thue-Siegel-Roth. Weitere Anwendungen auf transzendente Zahlen. — **II. Transzendente Zahlen als Werte von periodischen Funktionen und deren Umkehrfunktionen.** Irrationalität von $\pi$. Transzendenz der Werte der Exponentialfunktion und des Logarithmus. Arithmetische Bedingungen für algebraische Abhängigkeit von Funktionen. Transzendenzresultate, die mit der Exponentialfunktion, den elliptischen Funktionen und der Modulfunktion zusammenhängen. — **III. Eine Klasseneinteilung der Zahlen nach Mahler.** Einführung der Mahlerschen Klassifikation. Eigenschaften der Mahlerschen Klasseneinteilung. Die Klassifikation von Koksma und ihr Zusammenhang mit der Mahlerschen Einteilung. Eine maßtheoretische Frage. — **IV. Das Transzendenzmaß.** Ein Transzendenzmaß für $e$. Eine Gelfondsche Methode zur Annäherung von $\alpha^\beta$ durch algebraische Zahlen. Eine verallgemeinerte Fragestellung und weitere Resultate. — **V. Algebraische Unabhängigkeit transzendenter Zahlen.** (Die Siegelsche Methode.) Arithmetische Hilfsbetrachtungen. Der Lindemannsche Satz. Algebraische Beziehungen zwischen Besselschen Funktionen und ihren ersten Ableitungen. Der Siegelsche Satz über die Werte von Besselschen Funktionen und weitere Resultate. — Einige offene Fragestellungen. — Anhang. — Literaturverzeichnis. — Namen- und Sachverzeichnis.

## XCIII. Band: Vorlesungen über Inhalt, Oberfläche und Isoperimetrie

Von Dr. **H. Hadwiger,** Professor an der Universität Bern. Mit 34 Textabbildungen. XIII, 312 Seiten Gr.-8°. 1957. DM 46.20; Ganzleinen DM 49.80

Inhaltsübersicht: **Elementargeometrie der Polyeder.** Begriff des Polyeders. Elemente der Polyedergeometrie. Zerlegungsgleichheit. — **Der elementare Inhalt.** Begründung des Polyederinhalts. Polyederinhalt und Zerlegungsgleichheit. Inhalt und Oberfläche der Polyeder. — **Jordanscher Inhalt und Lebesguesches Maß.** Punktmengen. Inhalts- und Maßsysteme. Der Jordansche Inhalt. Das Lebesguesche Maß. Zum allgemeinen Inhalts- und Maßproblem. — **Ausgewählte Studien zur Mengengeometrie.** Lineare Ausmessung von Punktmengen. Minkowskische Mengenoperationen. Mengenkonvergenz und Auswahlsatz. Mengengeometrie und Inhalt. Symmetrisierung, Drehmittelung und Kugelung. — **Inhalt, Oberfläche und Isoperimetrie.** Minkowskische Oberfläche. Die isoperimetrische Ungleichung. — **Konvexe Körper und allgemeine Integralgeometrie.** Konvexe Körper und ihre fundamentalen Maßzahlen. Integralgeometrische Ansätze; Integralformeln. Allgemeine Integralsätze. Konkave Eikörperfunktionale. Die isoperimetrische Ungleichung. — Anmerkungen zu jedem Kapitel. — Literaturverzeichnis. — Namen- und Sachverzeichnis.

**SPRINGER-VERLAG / BERLIN · GÖTTINGEN · HEIDELBERG**


Springer-Verlag, Berlin · Göttingen · Heidelberg. — Druck der Universitätsdruckerei H. Stürtz AG., Würzburg
Printed in Germany